Inhoudsopgave

1 Voorwoord

Muziek en wiskunde, de taal van het gevoel en de taal van het weten. De verbanden tussen deze twee werelden hebben de gemoederen lange tijd bezig gehouden. De Pythagoreërs deden in de zevende eeuw voor Christus al belangrijke ontdekkingen die verbanden legden tussen de perceptie van tonen en wiskunde, één van de redenen waardoor hun motto werd: “Alles is een getal”. In de middeleeuwen zijn er veel pogingen gedaan tot het goed opschrijven van muziek in notenschriften, met als resultaat het systeem uit ongeveer het jaar 1000 van de Italiaanse monnik Guido d’Arezzo (tevens bedenker van *do-re-mi-...*), dat wij nu nog gebruiken.
Na de middeleeuwen ging men meer in harmonieën ging denken. Voor die tijd was de melodie het belangrijkste en werden meerstemmige melodieën onder elkaar geschreven, een horizontale manier van componeren. Langzamerhand begon men de verticale samenhang (de intervallen) interessant te vinden en werden toonsystemen belangrijker. Sindsdien zijn talloze toonsystemen bedacht en opgeschreven om maar zo goed mogelijk die muziek te kunnen laten horen die de componist in gedachten had.
De muziek werd ingewikkelder en dat uitte zich in allerlei modulaties naar andere toonaarden binnen hetzelfde muziekstuk. Hierdoor moesten toonsystemen aangepast worden, met als uiteindelijk resultaat de *gelijkzwevende stemming*, waarbij in alle toonaarden even goed (of slecht, zoals u wilt) gespeeld kan worden.
Toch kwam de machine die alsmaar nieuwe toonsystemen produceerde niet tot stilstand en ook ik zal aan het eind van het verslag een poging doen tot het introduceren van een nieuwe stemming.

2 Inleiding

Geluid wordt veroorzaakt door lucht die in trilling is. Het trillen van lucht veroorzaakt onregelmatigheden in de dichtheid van de luchtmoleculen en dat nemen onze oren waar als geluid.

2.1 Tonen

Maar een *toon* heeft iets extra's. Een toon heeft een *toonhoogte* die veroorzaakt wordt door een bepaalde regelmaat in de luchttrillingen, een patroon dat zich om een vaste tijd herhaalt. Die tijd heet de *trillingstijd* T, maar de term *frequentie*, welke is gedefinieerd als $\frac{1}{T}$ met als eenheid s^{-1} ofwel Hertz, is meer gangbaar als het om toonhoogtes gaat. Hoe hoger de frequentie, hoe meer trillingen in een seconde en hoe hoger een toon klinkt.

Een *zuivere toon* is een toon waarbij de trilling van de luchtdeeltjes zich op elke plaats in de tijd precies gedraagt als een sinus. Een muziekinstrument maakt geen zuivere toon, maar produceert een grilliger patroon, echter wel met een zekere regelmaat. Met behulp van Fourier-theorie is een gegeven regelmatige trilling te ontrafelen tot een zogenaamde *grondtoon* met *boventonen*. De grondtoon heeft de frequentie die hoort bij de tijd waarop het patroon zich herhaalt en de boventonen hebben frequenties die veelvouden zijn van de frequentie van de grondtoon. Deze boventonen spelen een belangrijke rol in het herkennen van instrumenten.

2.2 Intervallen en akkoorden

Zodra er twee verschillende tonen klinken is er sprake van een *interval*. De naam die een interval krijgt is afhankelijk van de verhouding tussen de frequenties van de twee verschillende tonen. Zo zijn twee tonen met frequentieverhouding van 1:2 (De frequentie van de hoogste toon is twee keer zo groot als die van de laagste) gedefinieerd als een *octaaf*. Dit is het belangrijkste interval, twee tonen met deze verhouding krijgen dezelfde *nootnaam*. Zo noemen we een toon van 440 Hz een 'A', maar een toon van 880 Hz en een toon van 220 Hz ook. Twee octaven boven elkaar geeft dus een frequentieverhouding van 4:1, wat het <u>product</u> is van 2:1 en 2:1. Dus als er drie noten zijn waarvan de frequentieverhouding tussen de eerste en de tweede is gegeven, evenals de frequentieverhouding tussen de tweede en de derde, dan kan de frequentieverhouding tussen de eerste en de derde berekend worden door het product van de twee gegeven frequentieverhoudingen te nemen.

Binnen het octaaf zitten nog veel andere tonen die een bepaalde frequentieverhouding hebben ten opzichte van die onderste A. Hieronder staat een lijstje met enkele belangrijke intervallen. In dit lijstje staan vooral intervallen waarvan de onderste toon een C is. Dit heeft ermee te maken dat de toonladder van C op de piano niet van zwarte toetsen gebruik maakt.

Verhouding	Naam	Voorbeeld	
2:1	Octaaf	C-C	do-do
3:2	Kwint	C-G	do-so
4:3	Kwart	C-F en G-C	do-fa resp. so-do
5:4	Grote terts	C-E	do-mi
6:5	Kleine terts	C-Es en E-G	do-re bèmol resp. mi-so
5:3	Grote sext	C-A en Es-C	do-la resp. mi bèmol
8:5	Kleine sext	C-As en E-C	do-la bèmol resp. mi-do

Deze intervallen zijn belangrijk omdat ze een simpele getalsverhouding hebben, wat ervoor zorgt dat de tonen veel gezamenlijke boventonen hebben. Hierdoor klinken de twee tonen samen prettig in de oren, dat noemen we consonant. Met een beetje rekenwerk is te zien dat een grote terts met daar bovenop een kleine terts een kwint maakt, want $5:4 \times 6:5 = 6:4 = 3:2$. Op dezelfde manier zie je dat een kwart + kwint = octaaf en kleine terts + grote sext = octaaf.

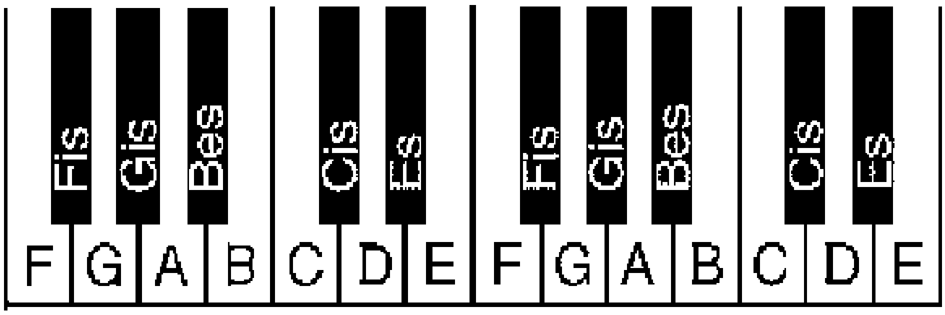
Zodra er meer dan twee verschillende tonen klinken, is sprake van een akkoord. Enkele belangrijke akkoorden vanuit C:

Verhoudingen	Naam	Voorbeeld
6:5:4	Grote drieklank	C-E-G
15:12:10	Kleine drieklank	C-Es-G
7:6:5:4	Septieme-akkoord	C-E-G-Bes

In een muziekstuk is er meestal sprake van een grondtoon, dat is de toon waarop het laatste akkoord van het muziekstuk een grote of kleine drieklank is[1]. Deze twee akkoorden zijn erg belangrijk, want voor muziekluisteraars klinkt een klassiek muziekstuk alleen 'af' als één van deze twee akkoorden klinkt. Dit effect kan worden versterkt als de akkoorden hieraan voorafgaand aan bepaalde patronen voldoen, zo'n patroon noemen we een 'afsluiting'.

[1] De terts en de kwint hoeven niet direct boven de grondtoon te liggen, de noten van het akkoord mogen ook een aantal octaven hoger voorkomen, zelfs meerdere keren.

Een akkoord in een muziekstuk met een grondtoon noteren we met romeinse cijfers. Het cijfer wordt bepaald door te kijken op de hoeveelste toon van de toonladder van de grondtoon het akkoord gebouwd is. Voor grote drieklanken gebruiken we hoofdletters en voor kleine drieklanken gebruiken we kleine letters. Als de grondtoon bijvoorbeeld C is, dan is het akkoord C-E-G een grote drieklank op de eerste *trap* die we noteren als I. Een grote drieklank op de vierde trap (IV) is F-A-C, want de F is de vierde toon in de toonladder van C en F-A-C is een grote drieklank. vi staat voor een kleine drieklank op de zesde trap, A-C-E. Onderstaande afbeelding is een poging om de lezer zonder muzikale voorkennis bovenstaande te laten inzien.



De keuze voor de zwarte toetsen is random.

Een veelvoorkomend patroon in de zo'n afsluiting van een muziekstuk is IV,V,I. In de toonaard C zijn dat de volgende akkoorden: F-A-C, G-B-D, C-E-G, waarin binnen een akkoord geschoven kan worden met de positie van de afzonderlijke noten.

2.3 Stemmingen

Welke frequenties hebben de tonen die tussen twee tonen met dezelfde nootnaam liggen? Dit is altijd een frequentie met een verhouding ten opzichte van de grondtoon die kleiner is dan 2:1. Een toon met een grotere verhouding ten opzichte van de grondtoon, heet hetzelfde als de toon met dezelfde verhouding gedeeld door 2, omdat deze een octaaf verschillen. Met het gegeven hoe een grote drieklank eruit ziet en de informatie uit de harmonieleer dat de drie akkoorden I,IV en V erg belangrijk zijn, kunnen we de tonen van de toonladder alvast een verhouding toewijzen:

toonladder	do	re	mi	fa	so	la	ti	do
frequentieratio[2]	1:1	9:8	5:4	4:3	3:2	5:3	15:8	2:1
Voorbeeld in C	C	D	E	F	G	A	B	C
Interval vanaf C			grote terts	kwart	kwint	grote sext		

Dit is de zogenaamde *reine stemming*. De I, IV en V zijn precies goed als C de grondtoon is. De G krijgt een frequentie van 3:2 omdat de G een kwint op C is. De kwint op G is een D, die zou dus een frequentie van $3:2 \times 3:2 = 9:4$ moeten krijgen, dit is echter groter dan twee, we hebben het dan ook over de D die <u>boven</u> de G van 2:1 ligt. Omdat het octaaf D-D precies goed moet zijn, krijgt de D binnen het octaaf een frequentieverhouding ten opzichte van C van $9:4 \times 1:2 = 9:8$. De F is zo gemaakt dat de kwint er boven een C is, dus 4:3, want $4:3 \times 3:2 = 4:2 = 2:1$.

In de reine stemming is heel duidelijk de boventonenstructuur terug te vinden. De Re, Mi, Sol en Ti zijn het resultaat van het terugbrengen van respectievelijk de negende, vijfde, derde en vijftiende boventoon binnen het octaaf, maw: steeds een octaaf naar beneden brengen van deze boventonen (verhouding door twee delen) totdat de verhouding tussen 1 en 2 ligt.

Eeuwen geleden hadden de Pythagoreërs al hun *Pythagoreïsche stemming* gedefinieerd:

toonladder	do	re	mi	fa	so	la	ti	do
frequentieratio[3]	1:1	9:8	81:64	4:3	3:2	27:16	243:128	2:1
Voorbeeld in C	C	D	E	F	G	A	B	C
Interval vanaf C			grote terts	kwart	kwint	grote sext		

De mineurstemming van Pythagoras verkrijg je door de E te vervangen door de Es (=kleine terts, deze toon had een verhouding ten opzicht van C van 32:27), de A te vervangen door As (=kleine sext met verhouding 128:81) en de B te vervangen door Bes (=kleine septieme met verhouding 16:9).

In deze stemming zijn de secunde, kwart en de kwint hetzelfde als in de reine stemming. De terts, sext en septieme zijn echter anders en dat is ingegeven door de fascinatie die de Pythagoreërs hadden voor de kwint. De verhouding van 3:2, die zij ontdekt hadden als consonant interval, wordt meerdere keren gebruikt om tonen een frequentie toe te kennen. Om vanaf de C op de E uit te komen kun je 4 kwinten op elkaar bouwen, die E heeft dus een frequentieverhouding t.o.v de onderste C van $(\frac{3}{2})^4 = \frac{81}{16}$). Vervolgens moeten we nog twee octaven terug naar beneden gaan om een verhouding tussen 1 en 2 te krijgen $(\frac{81}{16} \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{81}{64})$. Het verschil met de reine mi van 5:4 is gelijk aan 81:80 $(= \frac{81}{64}/\frac{5}{4})$ en noemen we een *komma*.

We hebben nu dus twee verschillende grote tertsen, grote sexten en grote septiemes. Daarom voeren we een notatie in, de zogenaamde *Eitz notatie*. Eitz nam de Pythagoreïsche stemming als uitgangspunt en schreef in superschrift erbij hoeveel komma's er opgeschoven moet worden. Een reine terts wordt in deze notatie dus weergegeven als $C^0 - E^{-1}$. Het akkoord $C^0 - Es^{+1} - G^0$ is in deze notatie een kleine drieklank, want $32 : 27 \times 81 : 80 = 5 : 4$, dus de pythagoreïsche kleine terts een komma opgehoogd geeft een reine kleine terts.
De hele reine stemming ziet er in deze notatie als volgt uit:

$$C^0 - D^0 - E^{-1} - F^0 - G^0 - A^{-1} - B^{-1} - C^0$$

Als een toetsinstrument precies op deze manier gestemd is, dan klinkt een muziekstuk met grondtoon C perfect, maar het is niet verstandig een muziekstuk met een andere grondtoon erop te spelen[4]. Een muziekstuk in D geeft problemen, omdat $D^0 - A^{-1}$ geen goede kwint is. Een ander probleem ligt bij het definiëren van de zwarte toetsen. Men kan ook de zwarte toetsen Es^{+1}, As^{+1} en Bes^{+1} vastleggen om muziekstukken in C mineur te kunnen spelen, maar een muziekstuk met grondtoon E heeft daar problemen mee, omdat de toonladder van E gebruik maakt van de Gis en die is niet aanwezig op het klavier (de toets tussen de G en de A is al als As gedefineerd). Moeten we de zwarte toets tussen de G en de A nu definiëren als een Gis (grote terts op E) of als een As (kleine terts op F)? Over deze en andere problemen gaat het volgende hoofdstuk.

Rekening houdend met verschillende modulatiemogelijkheden naar andere grondtonen zijn er in de 15^e, 16^e eeuw en later verschillende stemmingen ontstaan waarvan enkele ook door instrumentenbouwers werden gebruikt om in het echt te maken.

[4]Men zou tussen het spelen van twee muziekstukken het instrument opnieuw kunnen stemmen, maar afgezien van het feit dat dit praktisch erg lastig is, wordt er vaak binnen een muziekstuk gemoduleerd (=overgaan op een andere grondtoon). Dit zijn juist aspecten van muziek die het interessant maken.

3 Probleemstelling

3.1 Probleem 1

Zoals in het vorige hoofdstuk beschreven is, is het probleem met het stemmen van een toetsinstrument in de reine stemming dat moduleren, i.e. het overgaan op een andere grondtoon, niet goed kan zonder valse intervallen te creëren. Maar zelfs als er na een opeenvolging van akkoorden teruggekeerd wordt naar de oorspronkelijke grondtoon, zouden er problemen kunnen optreden. Een nietongebruikelijk akkoordenschema (zoals een opeenvolging van akoorden eigenlijk heet) is: I-vi-ii-V-I, welke klinkt als een afsluiting van een muziekstuk. Gebruiken we de perfecte drieklanken (4:5:6 voor een grote en 10:12:15 voor een kleine), dan stemmen we de piano zo dat I klinkt als $C^0 - E^{-1} - G^0$, wat na het vastleggen van de frequentie van de C de frequentie van de terts en de kwint vastlegt, zodat het volgende akkoord, vi, er als volgt uit moet zien om de kwint op de sext zuiver te houden: $A^{-1} - C^0 - E^{-1}$. Dit legt de keuze voor de grote sext vast. De noten uit het akkoord ii worden vastgelegd omdat de grote sext nu vastgelegd is, $D^{-1} - F^0 - A^{-1}$ is namelijk de kleine drieklank ii. Nu de secunde vastligt kunnen we naar V kijken, deze moet er zo uitzien: $G^{-1} - B^{-2} - D^{-1}$. Dit akkoord maakt gebruik van G^{-1}, zodat I er eigenlijk als $C^{-1} - E^{-2} - G^{-1}$ uit moet zien, maar dit akkoord gebruikt een C die precies een komma lager ligt dan de C waar we mee begonnen! In getallen: $\frac{5}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{80}{81}$. Meerdere keren dit schema herhalen[5] betekent dat de muziek steeds iets lager wordt, waardoor je steeds meer tonen nodig hebt. Een macht van $\frac{80}{81}$ zal namelijk nooit meer gelijk worden aan een bestaand interval, maw: door vanaf een toon steeds ${\frac{80}{81}}^e$ te dalen, kom je nooit meer op een al eerder gedefinieerde toon terug; dit is makkelijk in te zien als men naar de priemfactoren van de breuken kijkt.

3.2 Probleem 2

Een tweede probleem gaat over het definiëren van zwarte toetsen en verschijnt wanneer musici voor twee verschillende noten dezelfde toon gebruiken. Een verhoogde D (ofwel: Dis, gedefineerd als de zevende toon van de toonladder van E) is immers bijna hetzelfde als een verlaagde E (ofwel: Es, gedefineerd als de kleine terts op C). De Dis is een grote terts op B, die een kwint is op E (en een kwart onder de E), dus de zevende toon van de

[5] Denk aan de Bolero van Ravel, daar zien we dat één en hetzelfde patroon heel vaak herhaald wordt.

toonladder van E, die op z'n beurt weer een grote terts op C is. Daarom kunnen we z'n frequentie berekenen met $\frac{5}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{75}{64} = 1,171875$. Dit is niet gelijk aan $1,2 = \frac{6}{5}$ wat een reine kleine terts op C is, maar het komt wel erg in de buurt, daarom wordt vooral bij 'discrete instrumenten'[6] voor beide noten van dezelfde toon gebruik gemaakt. Ook het consequent doorvoeren van de filosofie van de pythagoreeërs gaat niet goed: Een Dis is dan 9 kwinten op de C (terugbrengen binnen het octaaf) en een Es is 3 kwinten onder de C (terugbrengen binnen het octaaf). Het verschil tussen deze waardes wordt veroorzaakt omdat 7 octaven niet precies gelijk zijn aan 12 kwinten ($2^7 \neq (\frac{3}{2})^{12}$), maar omdat het redelijk dicht bij elkaar ligt ($128 \approx 129.75...$) gebruiken we toch dezelfde toets, soms zelfs in eenzelfde muziekstuk, zoals Mozart in het muziekstuk hieronder waar in de eerste maten al zowel een verhoogde F (Fis) als een verlaagde G (Ges) voorkomt.

3.3 Oplossingen

Als reactie op het eerstgenoemde probleem werden in de zestiende en zeventiende eeuw zogenaamde *middentoon-stemmingen* ontworpen. In een meantone-stemming wordt het verschil tussen de E en de E^{-1} aangepakt. Om ze precies gelijk te maken, moet de Pythagoreïsche terts E, gedefineerd als 4 kwinten op de grondtoon C, een komma lager worden. Dat wordt gedaan door elke kwint afzonderlijk een kwart komma lager te maken. Dit is

[6]instrumenten waarbij de verschillende tonen een vaste plaats hebben, bijvoorbeeld in een hokje (gitaar) of een op een toets (piano, orgel)

de bekendste meantone stemming en hoewel hij een reine grote terts oplevert, is de kwint dus een beetje vals. Andere versies verlagen de kwint met $\alpha = \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}$ en $\frac{1}{3}$, wat voor de kleinere waarden als een soort compromis tussen de valsheid van de kwint en de valsheid van de terts gezien kan worden. Voor algemene α ziet de toonladder van C er als volgt uit:

$$C^0 - D^{-2\alpha} - E^{-4\alpha} - F^{+\alpha} - G^{-\alpha} - A^{-3\alpha} - B^{-5\alpha} - C^0$$

De tonen van buiten de toonladder worden ingevuld door ze te definiëren als een bepaald aantal kwinten vanaf C. Het is dan wel erg belangrijk om te kiezen hoeveel kwinten je naar boven en hoeveel kwinten je naar beneden gaat. Het maakt uit of je de toon tussen de D en de E definieert als een Dis (9 kwinten boven de C) of als een Es (3 kwinten onder de C), want het verschil daartussen is voor bijvoorbeeld $\alpha = \frac{1}{4}$ erg groot, groter nog dan het verschil dat berekend is bij probleem 2, namelijk $(\frac{3}{2}\frac{80}{81}^{\frac{1}{4}})^{12} = 125 \neq 128 = 2^7$. Dit verschil is ongeveer een kwart van het verschil tussen een C en de D, wat een heel goed hoorbaar verschil is. Hierdoor wordt het moeilijk om te moduleren in de buurt van toonaarden die gebruik maken van beide noten Dis en Es. In het fragment van de vorige paragraaf zie je dat zulke problemen echt voorkomen. Als je ervoor kiest om de toon tussen de D en de E te stemmen als een Dis, maar de toon tussen de A en de B als een Bes, dan heeft de toonaard Dis geen goede kwint, want de kwint op de Dis is een Ais en die plek is ingepikt door de Bes. Voor veel mogelijke keuzes om die grens te leggen zijn weer talloze stemmingen bedacht. Daarnaast zijn er stemmingen bedacht die een beperkt aantal modulaties wel acceptabel laten klinken. Voor deze stemmingen geldt dat hoe verder je wegmoduleert, hoe slechter de stemming klinkt. Deze stemmingen heten de *irreguliere stemmingen*. Een eigenschap van irreguliere stemmingen is dat eenzelfde patroontje een toon hoger een ander karakter krijgt. Bach heeft deze eigenschap juist op een positieve manier gebruikt in z'n werken.

3.4 Gelijkzwevende stemming

Als er voor α een waarde gekozen wordt die vlak bij $\frac{1}{11}$ ligt, wordt dit probleem opgelost. Elke kwint wordt nu met $\frac{1}{11}$ komma verlaagd en 12 kwinten op elkaar gestapeld liggen dus $\frac{12}{11}$ komma lager, wat ervoor zorgt dat 12 kwinten ineens wel vrijwel gelijk zijn aan 7 oktaven ($(\frac{3}{2}\frac{80}{81}^{\frac{1}{11}})^{12}$ is echt bijna 2^7). Elke halve toonsafstand is nu ongeveer even groot en dus maakt het niet uit in welke toonaard je speelt en hoe vaak je moduleert.

Dit brengt ons op een natuurlijke manier bij de *gelijkzwevende stemming.* Dit is een stemming die de opeenvolgende tonen van een octaaf precies gelijke verhouding geeft. Dat zijn er inclusief zwarte toetsen 12. Het octaaf krijgt in deze stemming precies de verhouding 2:1, omdat dit het belangrijkste interval is. Elke stap moet dus wel $\sqrt[12]{2}$ zijn. Maar hoe gaat het nu dan met die belangrijke kwint? Omdat
$\sqrt[12]{2}^7 = 1,4983... \approx 1,5 = 3:2$ klinkt deze niet heel slecht. Omdat 4 kwinten boven op elkaar ongeveer een terts geeft, klopt de terts ook ongeveer wel: $\sqrt[12]{2}^4 = 1,2599... \approx 5:4$. Deze stemming is dus zeer goed. Tegenwoordig worden alle piano's uitgerust met deze stemming.

Beroepsmusici horen echter de beperkingen van deze stemming. Vooral strijkers (die zelf mogen bepalen waar ze hun vinger neerzetten en dus bijvoorbeeld een Es lager kunnen intoneren dan een Dis) klagen hier soms over. De vraag is nu dus: kan het beter, zijn er betere stemmingen?

Men kan voor bepaalde toonaarden extra tonen toevoegen op het klavier, voor de toonaard C bijvoorbeeld zou zowel een E als een E^{-1} gemaakt kunnen worden of zowel een Dis als een Es. Om probleem 1 op te lossen zou een D^{-1} naast de D uitkomst kunnen bieden, maar als je het patroon herhaalt heb je ook een D^{-2}, D^{-3}... nodig. Afgezien van het feit dat het niet wenselijk is dat een patroon dat steeds even hoog bedoeld is steeds lager wordt gespeeld, zijn dit soort oplossingen niet wenselijk omdat ze een bepaalde grondtoon voortrekken, terwijl elke grondtoon even belangrijk is[7]. Daarom zal ik me beperken tot de stemmingen waarbinnen moduleren onbeperkt mogelijk is en waarbij dus de verhoudingen voor de intervallen voor elke begintoon gelijk zijn. Dit zijn de zogenaamde *reguliere stemmingen* waar de *gelijkzwevende stemming* een voorbeeld van is. We zullen echter meer tonen binnen een octaaf moeten stoppen om de belangrijke intervallen als de kwint, terts en septieme beter te kunnen benaderen. Dit brengt mij bij mijn onderzoeksvraag:

Hoeveel tonen heb ik binnen een octaaf nodig om alle belangrijke intervallen binnen een gegeven zuiverheid te kunnen spelen in alle toonaarden?

Bij het beantwoorden van deze vraag zullen een paar randvoorwaarden steeds blijven staan, daar zal niet aan getornd worden. Het gaat hier om de voorwaarde dat het octaaf altijd precies de verhouding 1:2 krijgt en dat

[7] Chopin componeert bijvoorbeeld vaak in Cis of in Des.

de tussenliggende noten allemaal dezelfde toonsafstand hebben zodat moduleren onbeperkt mogelijk is.

Opmerking: Deze twee eisen beperken het onderzoek. Er is in het verleden ook in andere oplossingsrichtingen gedacht. Hieruit heeft bijvoorbeeld Christiaan Huygens al een 31-toonsstemming uitgedacht, een irreguliere stemming die Adriaan Fokker (1887-1972) inspireerde tot het bouwen van een 31-toonsorgel dat nu nog in het Teylers Museum in Haarlem te bewonderen is.

De problemen met de keuze tussen Dis en Es zullen vervallen, omdat ze allebei met de geeiste zuiverheid gespeeld kunnen worden. Naarmate die eis sterker wordt, komen er automatisch op den duur twee verschillende toetsen voor.

4 Aanpak

Laten we beginnen met het benaderen van één interval tegelijk, de kwint. We willen het octaaf dus in q stapjes verdelen ($2^{\frac{\cdot}{q}}$), zodat p stapjes de verhouding 3:2 benadert. We krijgen hierdoor de vergelijking $2^{\frac{p}{q}} = 3 : 2$. Merk op dat dit overeenkomt met $\log_2 2^{\frac{p}{q}} = \log_2 (3 : 2)$ wat impliceert dat $\frac{p}{q}$ gelijk moet zijn aan $\log_2 (3 : 2)$. Daarom gaan we nu kijken naar de repeterende breuk van $\log_2 (3 : 2)$. Deze methode genereert een rij van breuken met groter wordende noemer die een gegeven getal steeds beter benadert. Dit proces houdt nooit op als je een irrationaal getal benadert. We zullen eerst bewijzen dat $\log_2 (3 : 2)$ irrationaal is.

Neem aan dat $\log_2 (3 : 2)$ wel rationaal is, zeg $\frac{m}{n}$. Dan $3 = 2^{\frac{m}{n}}$ en dus $3^n = 2^m$. Maar 3^n is altijd oneven terwijl 2^m altijd even is ($m > 0$). De aanname was dus onjuist en $\log_2 (3 : 2)$ is irrationaal, q.e.d.

De procedure van het maken van repeterende breuken begint met een identiteit. Noem het te benaderen getal eventjes x. Met $\lfloor x \rfloor$ bedoelen we het grootste gehele getal dat kleiner of gelijk is aan x, dan

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{(\frac{1}{x - \lfloor x \rfloor})}.$$

Noem $\lfloor x \rfloor$ nu a_0 en $\frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$ noemen we x_1. Dan krijgen we de uitdrukking

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Met $\frac{1}{x_1}$ kunnen we verder, omdat $\frac{1}{x_1}$ groter of gelijk aan 1 is, zoals we met x begonnen waren: $a_1 = \lfloor \frac{1}{x_1} \rfloor$ en $x_2 = \frac{1}{x_1} - a_1$ zodat de volgende vergelijking wordt:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}}.$$

Zo gaat het door zodat je voor $x = \log_2 (3 : 2)$ de rij breuken krijgt:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{389}{665}, \frac{9126}{15601}$$

In deze rij komt de breuk $\frac{7}{12}$ voor. Dat betekent dat $\log_2(3:2)$ goed benaderd wordt door $\frac{7}{12}$, zodat $2^{\frac{7}{12}}$ in de buurt komt van $3:2$. Dit was de verhouding van de kwint, één van de belangrijkste motivaties voor het verdelen van het octaaf in 12 gelijke stukken van $\sqrt[12]{2}$. We weten echter nog niet hoe het nu met de andere belangrijke intervallen gesteld is in deze stemming. Wat we wisten is dat 4 kwinten op elkaar gebouwd een beetje lijkt op een grote terts. In de evenredig zwevende stemming wijkt de kwint van $2^{\frac{4}{12}}$ ongeveer $\frac{126}{125}$ af van een reine kwint. Dit is acceptabel als je 'maar' 12 tonen binnen het octaaf hebt, maar in mijn onderzoeksvraag eisen we een willekeurig goede zuiverheid. We zullen dus naast het benaderen van de kwint ook de terts moeten benaderen. Dit 'simultaan' benaderen gaat op een andere manier.

5 Simultaan benaderen

We hadden al vastgelegd dat het octaaf in een aantal gelijke stukken verdeeld gaat worden. Een stemming die je dan krijgt heet gelijkzwevend. Gelijkzwevende stemmingen hebben een aantal voordelen. Om dat in te zien, zullen we eerst een lemma bewijzen dat over stemmingen in het algemeen gaat.

Lemma: Als een klavier zo gestemd is dat van een zekere toon naast een zuiver octaaf ook een interval met frequentieverhouding $y, (1 < y < 2)$ aanwezig is op het klavier, dan is er ook interval met frequentieverhouding $\frac{2}{y}$ aanwezig op het klavier.

Bewijs: Noem de frequentie van de onderste toon k. Er is dus een toon met frequentie yk en natuurlijk een toon met frequentie $2k$. De verhouding tussen deze twee tonen is $\frac{2k}{yk} = \frac{2}{y}$ $\square$

Als er dus bijvoorbeeld een kwint (3:2) is, dan is er ook een kwart, want $\frac{2}{3:2} = \frac{4}{3}$. Als we een gelijkzwevende stemming hebben, kunnen we zelfs concluderen dat als een willekeurige toon een kwint heeft, deze zelf ook een kwart heeft. Door de op de manier in het lemma gevonden kwart naar beneden te verschuiven tot de onderste toon frequentie k heeft, verandert op een gelijkzevende stemming de frequentieverhouding niet.

Hoewel we weten dat een zuivere kwint niet kan voorkomen op een gelijkzwevende stemming, kunnen we wel concluderen dat de kwart precies evenveel afwijkt als de kwint:

Stelling: Als op een klavier dat gelijkzwevend is gestemd met q tonen per octaaf van een zekere toon een interval met frequentieverhouding y aanwezig is op het klavier (p stapjes van $\sqrt[q]{2}$) met afwijking van maximaal ϵ (dus $|\log_2(y) - \frac{p}{q}| \leq \epsilon$), dan is er ook een interval met frequentieverhouding die maximaal ϵ van $\frac{2}{y}$ afwijkt (dus dan is er een r met $|\log_2 \frac{2}{y} - \frac{r}{q}| \leq \epsilon$).

Bewijs: Als er een p is met $|\log_2 y - \frac{p}{q}| \leq \epsilon$, dan geldt: $2^{\frac{p}{q}} \in [y2^{-\epsilon}, y2^{\epsilon}]$. Met het lemma zien we dan dat er dus een interval aanwezig op het klavier is waarvan de frequentieverhouding ligt tussen $\frac{2}{y2^{\epsilon}}$ en $\frac{2}{y2^{-\epsilon}}$. Dat interval heeft logischerwijs $q - p$ stapjes op het klavier. We nemen dus $r = q - p$ en zien dat $2^{\frac{r}{q}} \in [\frac{2}{y}2^{-\epsilon}, \frac{2}{y}2^{\epsilon}]$, dus dat $|\log_2 \frac{2}{y} - \frac{r}{q}| \leq \epsilon$. $\square$

Zoals gezegd kunnen we het gevonden interval overal terugvinden, omdat het een gelijkzwevende stemming is, in het bijzonder op de toon waarop het oorspronkelijke interval gemaakt was.

We kunnen dit principe ook uitbreiden voor intervallen die niet direct benaderd worden, maar wel indirect:

Stelling: Als op een klavier dat gelijkzwevend gestemd is met q tonen per octaaf van een zekere toon een interval met frequentieverhouding y_1 aanwezig is op het klavier (p_1 stapjes van $\sqrt[q]{2}$) met afwijking maximaal ϵ_1 (dus $|\log_2 y_1 - \frac{p_1}{q}| \leq \epsilon_1$) en als ook een interval met frequentieverhouding y_2 aanwezig is op het klavier (p_2 stapjes van $\sqrt[q]{2}$) met afwijking maximaal ϵ_2 (dus $|\log_2 y_2 - \frac{p_2}{q}| \leq \epsilon_2$), dan is er ook een interval met frequentieverhouding die maximaal $\epsilon_1 + \epsilon_2$ afwijkt van $\frac{y_1}{y_2}$.

Bewijs: Zonder verlies van algemeenheid kunnen we aannemen dat $y_1 \leq y_2$. In een ergste geval is het interval dat verhouding y_1 zou moeten hebben te klein met afwijking ϵ_1 en het interval dat verhouding y_2 zou moeten hebben te groot met afwijking ϵ_2 (in het andere ergste geval is dit precies andersom). Als beide intervallen als onderste toon de toon met frequentie k hebben, dan is op de manier van de vorige stelling de frequentieverhouding van deze twee intervallen gelijk aan $\frac{y_1 2^{-\epsilon_1}}{y_2 2^{\epsilon_2}} = \frac{y_1}{y_2} 2^{-\epsilon_1 - \epsilon_2}$. Dit geeft dat het interval van $p_2 - p_1$ staptjes maximaal $\epsilon_1 + \epsilon_2$ afwijkt ($|\log_2 \frac{y_1}{y_2} - \frac{p_2 - p_1}{q}| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$).$\square$

Voor mij betekent dit concreet dat als ik de kwint en de grote terts benader met een afwijking van maximaal ϵ, ik automatisch een kleine terts met afwijking van maximaal 2ϵ heb verkregen, omdat $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

Evenzo heb ik in dit geval ook een benadering van een grote septieme (in dit geval gedefineerd als de terts boven de kwint) die maximaal 2ϵ afwijkt (hij wijkt precies zoveel af als zowel de kwint als de grote terts precies ϵ te klein zijn). Dus door zowel de kwint als de grote terts als de harmonische septieme (verhouding $= \frac{7}{4}$) te benaderen zo dat ze maximaal ϵ afwijken, zijn alle grote en kleine drie- en vierklanken zo goed dat ze maximaal 2ϵ afwijken.

Vanaf nu nemen we dus aan dat we steeds de drie irrationale getallen ($\log \frac{3}{2}, \log \frac{5}{4}$ en $\log \frac{7}{4}$) willen benaderen met drie breuken met dezelfde noemer (die noemer bepaalt in hoeveel stapjes het interval verdeeld moet worden). Het nu volgende "argument van Dirichlet" geeft ons hiervoor twee nuttige stellingen.

Laten we om te beginnen het argument van Dirichlet voor één irrationaal getal te proberen te begrijpen. Daarvoor hebben we een lemma nodig. Definieer voor $x \in \mathbb{R} : (x) = x - \lfloor x \rfloor$ en $\mid \overline{x} \mid = min(qx - \lfloor qx \rfloor, \lfloor qx \rfloor + 1 - qx)$ ofwel de afstand tot het dichtsbijzijnde gehele getal.

Lemma: *Zij $z, y \in \mathbb{R}$ en $\epsilon > 0$ zodat $\mid (z) - (y) \mid \leq \epsilon$, dan $\mid \overline{z - y} \mid \leq \epsilon$.*

Bewijs: Schrijf $z = m + v$ en $y = n + w$ met $m, n \in \mathbb{Z}$ en $v, w < 1$. Omdat $\mid (z) - (y) \mid < \epsilon$ geldt: $v - w < \epsilon$. $z - y = m + v - n + w = m - n + v - w$ waarbij $m - n$ uiteraard geheel is. De afstand tot het dichtsbijzijnde gehele getal is dus gelijk aan $\mid v - w \mid = \epsilon$, wat laat zien dat $\mid \overline{z - y} \mid < \epsilon$ $\square$

Stelling: *Zij x irrationaal en zij $\epsilon > 0$ gegeven. Dan zijn er $p, q \in \mathbb{Z}$ met $\mid \frac{p}{q} - x \mid < \frac{\epsilon}{q} < \epsilon$.*

Bewijs: Neem $Q = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ en verdeel het interval $[0, 1]$ in Q stukken $[0, \frac{1}{Q}], [\frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}], ..., [\frac{Q-1}{Q}, 1]$. Alle $Q + 1$ getallen $0, (x), (2x), ..., (Qx)$ liggen in het interval $[0, 1]$ waarbij $(x) := x - \lfloor x \rfloor$. Er zijn nu dus $Q + 1$ getallen die in Q verschillende vakjes zitten. Dat betekent dat er minstens twee getallen, zeg $(q_1 x)$ en $(q_2 x)$, bij elkaar in één vakje zitten en dus maximaal $\frac{1}{Q}$ van elkaar verschillen. Met gebruik van het lemma krijgen we hieruit dat $\mid \overline{qx} \mid < \frac{1}{Q}$ waarbij q is $\mid q_2 - q_1 \mid$ Dus is er een p met $\mid qx - p \mid < \frac{1}{Q}$. Omdat $Q = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ weten we dat de noemer van $\frac{1}{\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1}$ groter dan $\frac{1}{\epsilon}$ is en dus is de breuk kleiner dan ϵ. Allebei de kanten door q delen geeft het gewenste resultaat: $\mid x - \frac{p}{q} \mid < \frac{\epsilon}{q} < \epsilon$. $\square$

Voor een gewenst maximaal verschil tussen het irrationale getal x en het rationale getal $\frac{p}{q}$ van ϵ verkrijgt men dus een maximaal verschil van $\frac{\epsilon}{q}$ wat nog kleiner is, omdat q een positief geheel getal is (het aantal stappen waarin het octaaf verdeeld wordt). Over de grootte van q weten we alleen dat hij kleiner dan $Q = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ is, dus *hoeveel* beter dan ϵ de benadering wordt, weet je niet van te voren. We weten wel dat we het octaaf dus in maximaal Q stapjes hoeven te delen om het interval maximaal ϵ te laten afwijken. De q kan veel kleiner zijn, hier zal in het volgende hoofdstuk dieper op in worden gegaan.

Voor meerdere x_i -tjes gaat het argument hetzelfde, maar in plaats van het interval [0,1], maken we gebruik van de hoger-dimensionale kubus:

Stelling: *Laat $x_1, x_2, ..., x_k$ irrationale getallen zijn en zij $\epsilon > 0$. Dan zijn er gehele getallen $p_i \quad (i = 1, ..., k)$ en q met:*

$$\mid \frac{p_i}{q} - x_i \mid < \frac{\epsilon}{q} < \epsilon \qquad \forall i = 1, ..., k.$$

Bewijs: Neem $Q = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ en verdeel de k-dimensionale kubus in Q^k stukken door vlakken parallel op een afstand van $\frac{1}{Q}$ van elkaar en van de zijdes te plaatsen. Alle $Q^k + 1$ punten $< (lx_1), (lx_2), ..., (lx_k) > (l = 0, 1, 2, ..., Q^k)$ zitten in Q^k vakjes. Dus zijn er twee getallen, zeg $< (q_1x_1), (q_1x_2), ..., (q_1x_k) >$ en $< (q_2x_1), (q_2x_2), ..., (q_2x_k) >$, die in hetzelfde vakje zitten, dus voor elke coördinaat is het verschil kleiner dan $\frac{1}{Q}$, want dat was de afstand tussen de wanden van de vakjes. Definieer weer $q = \mid q_2 - q_1 \mid$ zodat we weten dat $q < Q^k$. Gebruiken we het lemma voor elke coördinaat i, dan krijgen we: $\mid \overline{qx_i} \mid < \frac{1}{Q}$ voor alle i. Dus zijn er p_i met $\mid p_i - qx_i \mid < \frac{1}{Q}$. Delen door q geeft ons weer $\mid \frac{p_i}{q} - x_i \mid < \frac{1}{qQ}$. Omdat $Q = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ mogen we concluderen dat $\mid \frac{p_i}{q} - x_i \mid < \frac{\epsilon}{q} < \epsilon$. $\square$

Dit resultaat lijkt even goed, terwijl we meerdere irrationale getallen tegelijk benaderen. Dit is echter schijn, omdat hieruit alleen de garantie komt dat $q < Q^k$ met $Q = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$. Het aantal stappen in het octaaf q wordt in dit geval dus sneller groter in $\frac{1}{\epsilon}$ dan in het geval dat je één irrationaal getal benadert.

Deze methode is niet echt ‘zuinig’. Het kan immers al veel sneller voorkomen dat twee van de getallen bij elkaar in een vakje terechtkomen dan bij het toevoegen van het Q^k-ste punt. Daarnaast werkt de plaats van de grenzen, die absoluut gezien willekeurig is (relatief gezien zijn ze dat natuurlijk niet) omdat de breedte van een hokje van belang is), beperkend op de mogelijkheid of er twee punten in hetzelfde vakje zitten: 0.332 en 0.334 liggen bijvoorbeeld dicht bij elkaar, maar voor $Q = 3$ liggen ze niet in hetzelfde vakje (voor $Q = 4$ wel, terwijl er meer vakjes zijn). In het volgende hoofdstuk zullen we zien hoe we er bij het uitvoeren van het algoritme achter komen hoeveel toetsen er per octaaf nu werkelijk nodig zijn.

6 Verbeteringen

We kijken nog eens naar de laatste stelling: *Laat $x_1, x_2, ..., x_k$ irrationale getallen zijn. Dan zijn er p_i en q in $\mathbb{Z}$ met:*

$$\mid \frac{p_i}{q} - x_i \mid < \frac{\epsilon}{q} < \epsilon (i = 1..k).$$

In het bewijs wordt er aan de hand van de gegeven ϵ (die een maximale afwijking weergeeft van de te benaderen intervallen) een Q van $\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ gemaakt. Het bewijs garandeert ons dat het aantal toetsen per octaaf q niet groter zal worden dan die Q, maar verder is de uitkomst van die q een verrassing. We zouden graag een rechtstreekse formule voor q krijgen. Deze is niet voorhanden, maar het is wel mogelijk een indicatie te krijgen voor q bij gegeven ϵ.

Daartoe schrijven we de ongelijkheid die voorkomt in de voorlaatste zin van de het bewijs van de stelling van dirichlet een beetje om. Die ongelijkheid ziet er zo uit: $\mid \frac{p_i}{q} - x_i \mid < \frac{1}{qQ}$. Omdat $q < Q^k$ kunnen we concluderen dat $Q > q^{\frac{1}{k}}$ en dus geldt: $\mid \frac{p_i}{q} - x_i \mid < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{k}}}$. Als we verder doorgaan krijgen we dat het misschien wel een goed idee is om te proberen $Q = q^{\frac{1}{k}} = \lceil \sqrt[k+1]{\frac{1}{\epsilon^k}} \rceil$. Niets garandeert ons echter dat er bij het gebruik van deze Q een q uitkomt waarvoor $\frac{1}{q^{1+\frac{1}{k}}} < \epsilon$, omdat we alleen weten dat q kleiner is dan Q^k, maar als hij te klein wordt, dan geldt niet meer $\frac{1}{q^{1+\frac{1}{k}}} < \epsilon$. Daarom zullen we steeds als we op deze manier een Q uitrekenen, controleren of geldt dat $\frac{1}{q^{1+\frac{1}{k}}} < \epsilon$ voor de verkregen q.

Kijken we naar onze 12-toons gelijkzwevende stemming, dan zien we dat van onze drie gekozen intervallen, de kleine septieme het meest afwijkt van de reine stemming, namelijk, de tiende toon van het octaaf ligt er het dichtste bij en het verschil is: $\mid \log_2 (7/4) - \frac{10}{12} \mid = 0.0259784....$ Stellen we dit gelijk aan $\frac{1}{q^{1+\frac{1}{k}}}$ met $k = 3$ (omdat we 3 intervallen simultaan benaderen), dan krijgen we voor het aantal stapjes per octaaf $\lceil q \rceil = 16$ eruit. Dit bevestigt ons gevoel dat de 'indicatie' uit de vorige allinea aangescherpt kan worden, want we weten dus dat er met 12 tonen binnen het octaaf ook aan deze eisen (maximale afwijking van 0.0259784... voor de aangegeven intervallen) kan worden voldaan.

Daarom gaan we de procedure proberen uit te voeren. Met het uitvoeren van de procedure bedoel ik dat ik voor de punten daadwerkelijk uitreken in welke subkubus ze komen. Omdat $q < Q^k$, proberen we eerst $\lceil Q = \sqrt[3]{16} \rceil = 3$ ($Q = 4, 5, ...$ zouden ook bekeken kunnen worden, maar later zal blijken dat dit niet nodig is). Reken voor $l = 0, 1, .., 16$ uit: $(l \log_2 3/2), (l \log_2 5/4)$ en $(l \log_2 7/4)$. Bereken vervolgens in welke subkubus het 3-dimensionale getal

$$< (l \times \log_2 3/2), (l \times \log_2 5/4), (l \times \log_2 7/4) >$$

zit voor elke l. We stoppen bij het uitvoeren van de procedure dus letterlijk de 27 punten in 27 verschillende subkubussen. Er zijn maar $3^3 = 27$ subkubussen (doordat Q een naar boven afgerond getal is geworden, is dit groter dan 16), dus bij de 27 moeten we minstens twee getallen gevonden hebben, die in dezelfde subkubus (=vakjes) zitten, maar dit kan dus eerder gebeuren.

l	$(l \log_2 3/2)$		$(l \log_2 5/4)$		$(l \log_2 7/4)$		Dubbel?
0	0,000000	1	0,000000	1	0,000000	1	
1	0,584963	2	0,321928	1	0,807355	3	
2	0,169925	1	0,643856	2	0,614710	2	
3	0,754888	3	0,965784	3	0,422065	2	
4	0,339850	2	0,287712	1	0,229420	1	
5	0,924813	3	0,609640	2	0,036775	1	
6	0,509775	2	0,931569	3	0,844130	3	
7	0,094738	1	0,253497	1	0,651484	2	
8	0,679700	3	0,575425	2	0,458839	2	
9	0,264663	1	0,897353	3	0,266194	1	
10	0,849625	3	0,219281	1	0,073549	1	
11	0,434588	2	0,541209	2	0,880904	3	
12	0,019550	1	0,863137	3	0,688259	3	
13	0,604513	2	0,185065	1	0,495614	2	
14	0,189475	1	0,506993	2	0,302969	1	
15	0,774438	3	0,828921	3	0,110324	1	
16	0,359400	2	0,150850	1	0,917679	3	regel 1
17	0,944363	3	0,472778	2	0,725034	3	
18	0,529325	2	0,794706	3	0,532389	2	
19	0,114288	1	0,116634	1	0,339744	2	regel 7
20	0,699250	3	0,438562	2	0,147098	1	regel 5
21	0,284213	1	0,760490	3	0,954453	3	regel 12
22	0,869175	3	0,082418	1	0,761808	3	
23	0,454138	2	0,404346	2	0,569163	2	
24	0,039100	1	0,726274	3	0,376518	2	
25	0,624063	2	0,048202	1	0,183873	1	regel 4
26	0,209025	1	0,370130	2	0,991228	3	
27	0,793988	3	0,692059	3	0,798583	3	

Deze tabel is in EXCEL gemaakt, omdat het op die manier makkelijker zoeken was naar twee drie dimensionale getallen die in dezelfde subkubus zitten.

We zien dat in regel 16 dezelfde combinatie voorkomt als in regel 1, dus $< (16 \log_2 3/2), (16 \log_2 5/4), (16 \log_2 7/4) >$ zit in dezelfde subkubus als $< (1 \log_2 3/2), (1 \log_2 5/4), (1 \log_2 7/4) >$. Dus voor alledrie de dimensies is het verschil kleiner dan $\frac{1}{Q} = \frac{1}{3}$. Nu gebruik ik weer het lemma van hoofdstuk 5 en definieer ik net als in hoofdstuk 4: $q = 16 - 1 = 15$. Dit betekent dat zowel $\mid \overline{15 \log_2 3/2} \mid$ als $\mid \overline{15 \log_2 5/4} \mid$ en $\mid \overline{15 \log_2 7/4} \mid$ kleiner dan $\frac{1}{3}$ zijn. Dus voor alledrie de irrationale getallen ligt er een geheel getal dichter dan eenderde bij zijn product met 15: voor x_i is er een p_i met $| 15x_i - p_i |< \frac{1}{3}$. Beide kanten delen door 15 geeft dat $\frac{p_i}{15}$ dichter dan $\frac{1}{3\times 15} = 0.0222$ bij x_i ligt voor alle i. Dit geeft dus een stemming waarbij alle intervallen niet meer dan 0,0259784... afwijken.

Daarnaast geven 7 en 19, 5 en 20, 12 en 21 enz. ook een goede match. De getallen 7 en 19 zijn bijzonder, want hun verschil is 12 en die geven de reeds bekende gelijkzwevende stemming uit paragraaf 3.4, die het octaaf ook precies in 12 gelijke stappen verdeelt.

Het zou kunnen gebeuren dat er op deze manier van zoeken goede stemmingen over het hoofd gezien worden. Als namelijk $l_1 \log_2 3/2$ en $l_2 \log_2 3/2$ erg dicht bij elkaar liggen, maar de grens tussen twee vakjes ligt er precies tussen, dan wordt hij niet opgemerkt als goede stemming. Het loont daarom ook de moeite om de grenzen een keer niet bij $\frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}, ...1$ te leggen, maar bij $\frac{1}{2Q}, \frac{3}{2Q}...$, en dan alle permutaties van deze twee manieren om grenzen te leggen over de 3 coördinaten uit te proberen. In het bovenstaande geval krijg je dan dat als je bij de kwint de grenzen naar de tweede manier verandert de combinatie 7 en 19 nog steeds goed is, wat verklaard kan worden door de goede benadering van de kwint in de gelijkzwevende stemming.

Dit geeft aanleiding tot het invoeren van 'wegingen' aan intervallen. Je kunt voor bepaalde intervallen 'strenger' zijn dan voor anderen, omdat je bijvoorbeeld de kwint veel belangrijker vindt. Een Chinees zou misschien weer hele andere waarden toekennen en een jazz-pianist weer andere. Elke subkubus wordt dan verandert in een balk, waarvan de zijdes 3 verschillende lengte hebben. Je krijgt steeds gegarandeerd een stemming van maximaal het product van de aantallen vakjes per interval.

De tabel hieronder geeft voor enkele waardes van ϵ met een geschikte q. De eennabovenste waarde van ϵ is hierboven behandeld. De onderste twee waarden van ϵ zullen hieronder worden besproken.

Tabel 2. Benodigd aantal toetsen bij gegeven ϵ.

ϵ	q
0.0640	9
0.0260	12
0.0160	15
0.0040	53
0.0010	140
0.0004	171

Zoals beloofd voer ik de procedure nogmaals uit, maar dan voor een grens die wordt bepaald door ons menselijk oor. In de praktijk horen zelfs beroepsmuzikanten een verschil van ongeveer $\epsilon' = 2 \times 10^{-3}$ niet meer. Een stemming die dus voor iedereen acceptabel zou moeten zijn, kunnen we zoeken door te nemen $q = \lfloor \sqrt[4]{\frac{1}{\epsilon^3}} \rfloor = 177$ wat voor Q de waarde 6 geeft (zie laatste regel van de eerste allinea van dit hoofdstuk). De maximale afwijking van 2ϵ is door 2 gedeeld, omdat we in het vorige hoofdstuk hebben gezien de kleine terts een maximale afwijking heeft die twee keer zo groot is als die van de grote terts en de kwint, die we dus met een maximale afwijking van 10^{-3} willen verkrijgen.

Bij 216 ($= 6^3$) zou er dus een stemming uitgekomen moeten zijn. Dit gaat echter fout, omdat er een te kleine q uitkomt, namelijk een q zodat *niet* geldt: $\frac{1}{q^{1+\frac{1}{k}}} < \epsilon = 10^{-3}$. Terugvallen op de officiële Q van $Q = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$ geeft $Q = 1001$. De orde van grootte van het aantal toetsen ligt bij deze ϵ op 100, dus dan zou de het maximale verschil kleiner zijn dan $\frac{1}{qQ} = 10^{-5}$, wat veel meer is dan nodig. Dus ik probeer een Q van $\frac{1000}{100} = 10$.

Op dezelfde manier als onder de tabel beschreven is, maar dan met $Q = 10$ (dus 1000 verschillende subkubussen), verkrijg ik nu $q = 171$. Dit geeft een hele goede stemming waarbij de kwint slechts $1,6717910^{-4}$ afwijkt, de grote terts $2,9066810^{-4}$ en de kleine septieme $3,3737810^{-4}$.

Dit is bijna drie keer zo goed als gevraagd, en inderdaad, 10*171 is wel echt groter dan 1000. Daarom voer ik de procedure voor $Q = 9$ nogmaals uit en dan verkrijg ik weer q=171, maar bij Q=8 wordt er een q van **140** gevonden, het verschil van 156 en 16, welke in dezelfde subkubus zitten. Dit geeft een stemming waarbij de kwint 7.51785 10^{-4} afwijkt, de grote terts 4.995 10^{-4} en de kleine septieme 2.12 10^{-4}.

Dit zit mooi in de richting van wat de eis was. De grote terts moet nu gespeeld worden door 45 stapjes van $\sqrt[140]{2}$ te nemen, de kwint met 45 stapjes en de septieme met 113 stapjes. Deze getallen zijn te berekenen door naar het verschil van $156 \times \log_2 3/2$ en $16 \times \log_2 3/2$ respectievelijk $156 \times \log_2 5/4$ en $16 \times \log_2 5/4$ en $156 \times \log_2 7/4$ en $16 \times \log_2 7/4$ te kijken. Dit zijn erg grote afstanden als je bedenkt dat elk stapje door een vinger afzonderlijk moet kunnen worden ingedrukt. Daarom zijn dit soort stemmingen niet praktisch en alleen leuk om een bachelorscriptie mee af te sluiten.

7 Conclusie

We hebben gezien dat de eisen die de muziek aan de stemmingen van toetsinstrumenten oplegt niet allemaal tegelijk ingewilligd kunnen worden. In dit verslag is de wens om onbeperkt te kunnen moduleren ingewilligd door een reguliere stemming te eisen. Door een steeds kleiner wordende maximale 'valsheid' te accepteren, kunnen met meer toetsen per octaaf zuivere intervallen benaderd worden.

De keuze van de te benaderen intervallen kan afhangen van de muziekstijl. Voor elk interval kan een eigen maximale afwijking van het zuivere interval geëist worden. Deze afwijking mag onbeperkt klein worden geëist, want we hebben gezien dat er altijd een stemming is die voldoet. Het aantal toetsen per octaaf wordt echter snel onpraktisch. Bij een valsheidsgrens van de verhouding 0.0010, een getal dat ingegeven is door de bouw van het menselijk oor dat kleinere afwijkingen niet meer waarneemt, is bijvoorbeeld al een aantal van 140 toetsen per octaaf nodig.

In dit verslag hebben we een methode ontwikkeld om bij een gegeven maximale afwijking van gegeven intervallen een stemming te vinden die hieraan voldoet. Deze methode is ingegeven door het bewijs van het argument van Dirichlet uit de getaltheorie over het benaderen van irrationale getallen door rationale getallen. Met deze methode wordt ook de vaak-gebruikte gelijkzwevende stemming van twaalf tonen per octaaf gevonden bij een bepaalde maximale wijking. Ook voor groter wordende getallen is deze methode werkbaar door enkele slimme aanpassingen van het gebruikte EXCEL-bestand. Deze aanpassingen zijn echter niet besproken, omdat ze wiskundig niet interessant zijn.

Mocht u begonnen zijn met het lezen van de conlusie, dan wens ik u veel leesplezier voor de rest van het verslag. In het andere geval: 'Bedankt voor uw aandacht.'

Gebruikte literatuur

- D. Benson - *Music: a Mathematical Offering* (Cambridge University Press, internetversie 23 augustus 2007, http://www.maths.abdn.ac.uk/ bensondj/html/maths-music.html). Hoofdstukken 4, 5 en 6.
- J. van de Craats - *De juiste toon* (Epsilon-uitgave, Zebra reeks, eerste druk, 2003).
- G. H. Hardy en E. M. Wright -*An introduction to the theory of numbers* Oxford University Press, vierde druk, 1962).