Opetusmonisteita

Helsingin yliopiston kansantaloustieteen laitos

Tapio Palokangas

Luentoja kansantaloustieteen matemaattisista menetelmistä

Syyslukukausi 2007

1 Determinantit

1.1 Mitä ovat determinantit?

Determinantit ovat lukuja, joita käytetään mm. matriisilaskenassa on matemaattisessa optimoinnissa. Ne voidaan määritellä seuraavasti:

- *Ensimmäisen asteen determinantti* on $|a_{11}| = a_{11}$, missä a_{11} on luku. Esimerkiksi $|4| = 4$. Huomautus: vaikka determinantteja merkitään pystytangoilla, niitä ei saa sekoittaa itseiarvoihin!
- *Toisen asteen determinantti* on
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$
Esimerkiksi
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1.$$
- *Kolmannen asteen determinantti* voidaan kehittää minkä tahansa vaaka- tai pystyrivin avulla seuraavasti:

1. vaakarivi
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

2. vaakarivi
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3. vaakarivi
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1. pystyrivi
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2. pystyrivi
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

3. pystyrivi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Kehitettäessä kunkin kertoimen a_{ij} etumerkki on $(-1)^{i+j}$, missä i on vaaka- ja j pystyrivin järjestysnumero.

Esimerkiksi

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1-8) - 1(1-4) + 2(4-2) = -14.$$

- *n:nnen asteen determinantti* voidaan kehittää minkä tahansa vaaka- tai pystyrivin avulla seuraavasti:

  i:nnes vaakarivi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{1-i,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{1+i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} & & \end{vmatrix}$$

  j:nnes pystyrivi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{1-i,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{1+i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} & & \end{vmatrix}$$

Kehittämällä edelleen alideterminantit päädytään lopulta tilanteeseen, jossa determinatti on aikioiden a_{ij} funktio.

1.2 Determinanttien ominaisuuksia

Determinantista saadaan *käänteisdeterminantti*, jos sen pysty- ja vaakarivit vaihtavat paikkaansa.

Ominaisuus 1: Determinantin ja sen käänteisdeterminantin arvo ovat samat,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

TODISTUS: Jos determinatti kehitetään aina 1. vaakarivin avulla ja sen käänteisdeterminatti aina 1. pystyrivin avulla, niin saadaan täsmälleen sama tulos.

Ominaisuus 2: Jos yhden vaakarivin tai yhden pystyrivin kaikki alkiot kerrotaan samalla vakiolla k, niin silloin koko determinantin arvo kerrotaan samalla vakiolla k,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{ij} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & ka_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & ka_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & ka_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

TODISTUS: Jos yhtälön (1.1) molemmat puolet kehitetään pystyrivin i avulla, niin saadaan sama tulos. Jos yhtälön (1.2) molemmat puolet kehitetään vaakarivin j avulla, niin saadaan sama tulos.

Ominaisuus 3: Determinatti muuttuu vastaluvukseen, jos kaksi sen pystyriviä tai kaksi sen vaakariviä vaihtavat paikkaansa:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1h} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ih} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\
a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nh} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= - \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1h} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & \dots & a_{ih} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
a_{n1} & \dots & a_{nh} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}. \tag{1.4}
$$

TODISTUS: Vaakariveille

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{h1} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j} & \dots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j} & \dots & a_{i+1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{h1} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{hn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h-1+j} a_{hj}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j} & \dots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j} & \dots & a_{i+1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{h-1,1} & \dots & a_{h-1,j} & \dots & a_{h-1,n} \\
a_{h+1,1} & \dots & a_{h+1,j} & \dots & a_{h+1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h-1+j} a_{hj} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j} & \dots & a_{i-1,n} \\
a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j} & \dots & a_{i+1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{h-1,1} & \dots & a_{h-1,j} & \dots & a_{h-1,n} \\
a_{h+1,1} & \dots & a_{h+1,j} & \dots & a_{h+1,n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$= -\sum_{j=1}^{n}(-1)^{h+j}a_{hj}\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{h-1,1} & ... & a_{h-1,j} & ... & a_{h-1,n} \\ a_{h+1,1} & ... & a_{h+1,j} & ... & a_{h+1,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{h1} & ... & a_{hj} & ... & a_{hn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sama pystyriveille.

Ominaisuus 4: Jos determinantilla on kaksi täysin samaa vaakariviä tai kaksi täysin samaa pystyriviä, niin sen arvo on nolla:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & & \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{1.5}$$

Todistus: Sijoittamalla $a_{ij} = a_{hj}$ $(j = 1, ..., n)$ yhtälöön (1.3) saadaan vasemmanpuoleinen yhtälö (1.5). Sijoittamalla $a_{ij} = a_{ih}$ $(i = 1, ..., n)$ yhtälöön (1.4) saadaan oikeanpuoleinen yhtälö (1.5).

Ominaisuus 5: Jos yhden vaakarivin tai yhden pystyrivin kaikki alkiot voidaan kirjoittaa summiksi, niin determinatti voidaan esittää kahden determinantin summana seuraavasti:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} + \widetilde{a_{i1}} & ... & a_{ij} + \widetilde{a_{ij}} & ... & a_{in} + \widetilde{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \widetilde{a_{i1}} & ... & \widetilde{a_{ij}} & ... & \widetilde{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j}+\widetilde{a_{1j}} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij}+\widetilde{a_{ij}} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj}+\widetilde{a_{nj}} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & ... & \widetilde{a_{1j}} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & \widetilde{a_{ij}} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & \widetilde{a_{nj}} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

TODISTUS: Jos yhtälön (1.6) molemmat puolet kehitetään pystyrivin i avulla, niin saadaan sama tulos. Jos yhtälön (1.7) molemmat puolet kehitetään vaakarivin j avulla, niin saadaan sama tulos.

Ominaisuus 6: Jos yksi vaakarivi kerrotaan vakiolla ja lisätään toiseen vaakariviin tai jos yksi pystyrivi kerrotaan vakiolla k ja lisätään toiseen pystyriviin, niin determinatin arvo ei muutu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{h1}+ka_{i1} & ... & a_{hj}+ka_{ij} & ... & a_{hn}+ka_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{h1} & ... & a_{hj} & ... & a_{hn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.8}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1h}+ka_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{ih}+ka_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & & \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nh}+ka_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1h} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{ih} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & & \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nh} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

TODISTUS: Ominaisuuksien 2, 4 ja 5 perusteella vaakariveille

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{h1}+ka_{i1} & ... & a_{hj}+ka_{ij} & ... & a_{hn}+ka_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{ij} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\equiv 0}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hj} & \dots & a_{hn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

Sama pystyriveille.

2 Komparatiivinen statiikka

2.1 Ongelma

Miten systeemistä (kansantalous, kotitalous, yritys jne.), jossa on olemassa useita samanaikaisia eli simultaanisia riippuvuuksia ja joka koko ajan on jatkuvassa liikkeessä, voidaan johtaa luotettavia ennusteita?

Tämän ongelman selvittämisessä kansantaloustiede käyttää kahta tutkimusmetodia:

komparatiivista statiikkaa, jossa systeemistä abstrahoidaan pois liike ja keskitytään tutkimaan systeemin rakennetta, sekä

komparatiivista dynamiikkaa, jossa keskitytään tarkastelemaan pelkästään systeemin liikettä.

Nämä metodit on alunperin lainattu fysiikasta (lähinnä mekaniikasta), mutta ajan myötä ne ovat mukautuneet kansantaloustieteen omiin tarpeisiin. Niitä sovelletaan pääpiirteissään seuraavalla tavalla.

2.1.1 Komparatiivinen statiikka:

1. Oletetaan, että systeemi on alunperin tasapainossa (= lepotilassa), jolloin siinä ei ole mitään liikettä.
2. Oletetaan, että tapahtuu jokin ulkoinen muutos ja katsotaan, mikä on uusi muutoksen jälkeinen tasapaino.
3. Vertailemalla uutta tasapainoa alkuperäiseen tasapainoon saadaan laadullista tietoa systeemin rakenteellisista riippuvuuksista.

Esimerkkejä komparatiivisesta statiikasta:

1. kuula epätasaisella pinnalla
2. 'kysynnän ja tarjonnan laki'
3. kuluttajan ja yrityksen tasapaino
4. Kahnin-Keynesin ekspansiokerroin

Tulkinnan erityispiirteitä:

(I) Komparatiivisen statiikan soveltaminen edellyttää, että systeemi oletetaan *stabiiliksi* eli vakaaksi niin, että se hakeutuu kohden jotain tasapainoa. Muuten uutta tasapainoa ei voidaan olenkaan saavuttaa, joten uutta ja vanhaa tasapainoa ei voida lainkaan verrata. Mallin stabiilisuuden selvittäminen kuuluu komparatiivisen dynamiikan alueeseen.

(II) Komparatiivisen statiikan ideana on liikkeen poistaminen systeemistä tarkastelemalla sitä tasapainossa, jossa liikettä ei ole laisinkaan. Tällöin joudutaan kuitenkin olettamaan, että systeemi on koko ajan likimääräisen lähellä tasapainoa, jotta sen rakenteelliset riippuvuudet olisivat likimäärin samat kuin tasapainossa. Toisin sanoen: komparatiivinen statiikka kuvaa likimääräisesti systeemin todellisia rakenteellisia ominaisuuksia, mikäli ollaa lähellä tasapainoa. Mitä kauempana systeemin todellinen tila on tasapainosta, sitä epätarkemmin komparatiivinen statiikka ennustaa systeemin käyttäytymistä.

(III) Koska komparatiivinen statiikka vertailee muutosta edeltävää tasapainoa muutoksen jälkeiseen tasapainoon, se kuvaa pysyvän muutoksen pysyvää vaikutusta.

Esimerkki: Makromalli ennustaa, että rahamäärän lisäys taloudessa nostaa hintatasoa. Tarkkaan ottaen tämä täytyy tulkita siten, että rahamäärän *pysyvä* lisäys pyrkii *pysyvästi* nostamaan hintatasoa.

(IV) Koska systeemin täytyy olla aina suhteellisen lähellä tasapainoa (vrt. kohta (II) yllä), tutkittava eksogeeninen muutos on oletettava pieneksi. Jos muutos olisi suuri, niin systeemi olisi muutoksen jälkeen kaukana voimassa olevasta (= uudesta) tasapainosta ja komparatiivisen statiikka ennustaisi huonosti.

Esimerkki: Mallin ennustama hintatason riippuvuus rahamäärästä on sitä tarkempi ja luotettavampi (epätarkempi ja epäluotettavampi), mitä pienempi (suurempi) on rahamäärän suhteellinen muutos.

(V) Vaikka taloudelliset ja fysikaaliset mallit ovat tekniseltä rakenteeltaan usein varsin samankaltaisia, niiden tulkinnassa on silti suuria eroja, koska ne kuvaavat varsin erilaisia ilmiöitä. Mekaniikassa pystytään yleensä arvioimaan milloin ja miten uuteen tasapainoon päästään. Kansantaloustieteessä komparatiivisen statiikan tulokset ovat *tendessimäisiä:* se ei sano mitään siitä, millä hetkellä uusi tasapaino saavutetaan, vaan kertoo sen, että mallin ennustama muutos tapahtuu ennemmin tai myöhemmin.

Esimerkki: Rahamäärän lisäyksen aiheuttama hintatason nousu tapahtuu tietyn ajanjakson kuluessa ja vieläpä niin, että tämä 'monetäärisen viiveen' pituus on satunnaismuuttuja.

Tämä tendenssimäisyys (ja siitä aiheutuva epävarmuus) on peräisin taloudellisten ilmiöiden luonteesta. Muutokset tapahtuvat mikroyksikköjen (kuluttajat, yritykset, työmarkkinajärjestöt jne.) valintojen ja tavoitteisten toimintojen kautta. Suurten lukujen lain nojalla mikroyksiköt *joukkona* käyttäytyvät verrattain säännönmukaisesti, ja taloudelliset mallit kuvaavat näitä säännönmukaisuuksia. Yksilöiden välisistä eroista ja suuresta määrästä johtuen välitysmekanismit ovat kuitenkin niin hienojakoisia ja monisyisiä, että havaitut säännönmukaisuudet jäävät tendessimäisiksi.

(VI) Jotta komparatiivista statiikkaa voitaisiin soveltaa, mallin tarkasteleman ajanjakson täytyy olla riittävän pitkä, jotta uusi tasapaino voidaan saavuttaa sen puitteissa.

Esimerkki: Jos halutaan selvittää, mikä on rahamäärän *pysyvän* lisäyksen aiheuttama *pysyvä* hintatason muutos, niin ajanjakson on oltava niin pitkä, että koko monetäärinen viive satunnaisvaihteluineen sisältyy siihen; eli kysymys on tässä tapauksessa pitkän aikavälin mallista.

2.1.2 Komparatiivinen dynamiikka:

1. Rakennetaan jokin mekanismi, joka liikuttaa systeemiä silloin, kun tämä on epätasapainossa (so. tasapainon ulkopuolella).

2. Valitaan systeemille erilaisia alkuarvoja ja lasketaan näitä vastaavat kehitysurat.

3. Vertailemalla eri alkutilanteita vastaavia systeemin kehitysuria saadaan laadullista tietoa systeemin liikkumisesta.

Jos systeemi on *stabiili*, se hakeutuu kohden jotain tasapainoa, jos se on *epästabiili*, se erkaantuu tasapainosta. Sama systeemi voi toisilla alkuarvoilla olla stabiili ja toisilla epästabiili. Mikäli systeemi on kaikilla ajateltavissa olevilla alkuarvoilla stabiili (epästabiili), sitä sanotaan *globaalisti stabiiliksi (epästabiiliksi)*.

Esimerkkejä komparatiivisesta dynamiikasta (luennolla):

1. kuula epätasaisella pinnalla

2. 'lukiseittiteoreema'

3. osakekurssin määräytyminen

4. vaihtokurssin yliampuminen

2.2 Komparatiivinen statiikka matemaattisti

Taloudellisissa (ja myös luonnontieteellisissä) malleissa systeemin *tasapainoa* kuvataan jonkin yhtälöryhmän avulla, esim.

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, , ..., x_{n+m}) = 0,\\
&f_2(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, , ..., x_{n+m}) = 0,\\
&\ldots\\
&f_n(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, , ..., x_{n+m}) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

missä $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ovat endogeenisia muuttujia ja $(x_{n+1}, ..., x_{n+m})$ eksogeenisia muuttujia (parametreja). Tämä yhtälöryhmä voidaan esittää myös seuraavasti:

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, , ..., x_{n+m}) = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.2}$$

Joukkoa A, josta eksogeeniset muuttujat $(x_{n+1}, ..., x_{n+m})$ voidaan valita, sanotaan systeemin *määrittelyjoukoksi (domain)*. Tällöin merkitään

$$(x_{n+1}, ..., x_{n+m}) \in A.$$

Jotta yhtälöryhmä (2.1) tai (2.2) ratkeaisi, siinä täytyy olla sama määrä n endogeenisia muuttujia kuin yhtälöitä. Jos yhtälöitä on enemmän kuin muuttujia, systeemiä sanotaan *ylideterminoituvaksi*, ja jos yhtälöitä on vähemmän kuin muuttujia, niin sitä sanotaan *alideterminoituvaksi*. Tasapainomalli ei saa olla yli- eikä alideterminoituva!

Mikäli yhtälöryhmällä (2.1) tai (2.2) on olemassa *yksikäsitteinen ratkaisu (unique solution)* ja kaikki funktiot f_i $(i = 1, ..., n)$ ovat (osittais)derivoituvia kaikkien muuttujien x_j $(j = 1, ..., n+m)$ suhteem, niin silloin se määrittelee endogeeniset muuttujat $(x_1, x_2, ..., x_n)$ eksogeenisten muuttujien $(x_{n+1}, , ..., x_{n+m})$ derivoituvina funktioina seuraavasti:

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1(x_{n+1}, , ..., x_{n+m}), \\ x_2 &= X_2(x_{n+1}, , ..., x_{n+m}), \\ &\dots \\ x_n &= X_n(x_{n+1}, , ..., x_{n+m}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tämä voidaan kirjoittaan myös seuraavasti:

$$x_i = X_i(x_{n+1}, , ..., x_{n+m}), \quad i = 1, ..., n. \tag{2.4}$$

Funktioita (2.3) tai (2.4) sanotaan systeemin (2.1) tai (2.2) *ratkaisufunktioiksi*. Yhtälöryhmää (2.3) tai (2.4) sanotaan myös systeemin (2.1) tai (2.2) *staattiseksi ratkaisuksi*.

Mikäli yhtälöryhmällä (2.1) tai (2.2) on olemassa monta ratkaisua, sanotaan, että sillä on *monikäsitteinen ratkaisu (multiple solution)*. Tällöin ollaan vaikea ongelman edessä. Mallilla ei nimittäin voida ennustaa, jos ei tiedetä, mihin tasapainoon se hakeutuu. Taloudellisissa malleissa tämän yleensä kierretään, joko osoittamalla että vain yksi tasapainoista on stabiili, tai rajoittamalla systeemin määrittelyjoukkoa A niin, että vain yksi tasapaino on mahdollinen.

2.3 Implisiittifunktioteoreema

Sen perusteella mitä tiedetään funktioiden f_i ominaisuuksista systeemissä (2.2), voidaan päätellä jotakin myös ratkaisufunktioiden X_i ominaisuuksista relaatiossa (2.4). Matemaattisesti tätä voidaan selvittää seuraavan teoreeman avulla.
Implisiittifunktioteoreema (implicit function theorem). *Oletetaan, että jokaisella funktiolla f_i $(i = 1, ..., m)$ on olemassa kaikki osittaisderivaatat*

$$\partial f_i / \partial x_k = 0, \text{ kun } k = 1, ..., n+m.$$

Jos eksogeenisten muuttujien $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ muutokset ovat pieniä, niin silloin systeemin (2.2) *tasapainon muutokselle pätee*

$$\sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial f_i(x_1, ..., x_{n+m})}{\partial x_k} dx_k = 0; \quad i = 1, ..., n,$$

missä dx_k kuvaa muuttujan x_k tasapainoarvon muutosta.

Todistus (heuristinen): Oletetaan, että alkutilanteessa systeemi on tasapainossa, jossa muuttujien $(x_1, , ..., x_{n+m})$ arvot ovat $(x_1^o, ..., x_{n+m}^o)$. Tällöin tietysti pätee

$$f_i(x_1^o, ..., x_{n+m}^o) = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{2.5}$$

Oletetaan edelleen, että joku tai jotkin parametreista $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ muuttuu hieman, jolloin koko systeemi liikahtaa alkupisteestä $(x_1^o, ..., x_{n+m}^o)$ uuteen tasapainopisteeseen $(x_1, , ..., x_{n+m})$, jossa (2.2) on voimassa. Otetaan nyt funktiosta $f_i(x_1, , ..., x_{n+m})$ pisteen $(x_1^o, ..., x_{n+m}^o)$ suhteen Taylorin kehitelmä:

$$\begin{aligned}
&f_i(x_1, , ..., x_{n+m}) \\
&= f_i(x_1^o, ..., x_{n+m}^o) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial f_i(x_1^o, ..., x_{n+m}^o)}{\partial x_k}(x_k - x_k^o) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{h=1}^{n+m} \frac{\partial^2 f_i(x_1^o, ..., x_{n+m}^o)}{\partial x_k \partial x_h}(x_k - x_k^o)(x_h - x_h^o) \\
&\quad + \frac{1}{2 \cdot 3} \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{h=1}^{n+m} \sum_{s=1}^{n+m} \frac{\partial^3 f_i(x_1^o, ..., x_{n+m}^o)}{\partial x_k \partial x_h \partial x_s}(x_k - x_k^o)(x_h - x_h^o)(x_s - x_s^o) \\
&\quad \cdots
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Sijoittamalla (2.2) and (2.5) yhtälöön (2.6) saadaan

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial f_i(x_1^o, ..., x_{n+m}^o)}{\partial x_k}(x_k - x_k^o) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{h=1}^{n+m} \frac{\partial^2 f_i(x_1^o, ..., x_{n+m}^o)}{\partial x_k \partial x_h}(x_k - x_k^o)(x_h - x_h^o) \\
&\quad + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{h=1}^{n+m} \sum_{s=1}^{n+m} \frac{\partial^3 f_i(x_1^o, ..., x_{n+m}^o)}{\partial x_k \partial x_h \partial x_s}(x_k - x_k^o)(x_h - x_h^o)(x_s - x_s^o) \\
&\quad \cdots
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Oletetaan vielä että parametrien $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ muutos on pieni, jolloin kaikkien muuttjien muutokset $dx_j = x_j - x_j^o$ $(j = 1, ..., n+m)$ jäävät pieniksi. Tällöin $x_j \approx x_j^o$, toisen ja useamman kertaluvun tulotermit

$$(x_k - x_k^o)(x_h - x_h^o), \quad (x_k - x_k^o)(x_h - x_h^o)(x_s - x_s^o), \quad \text{jne.}$$

tulevat niin pieniksi, että ne voidaan pyöristää nolliksi. Sijoittamalla tämä tulos, $dx_j = x_j - x_j^o$ $(i = 1, ..., n+m)$ ja $x_j \approx x_j^o$ $(i = 1, ..., n+m)$ yhtälöön (2.7) saadaan

$$\begin{aligned}
0 &\approx \sum_{k=1}^{n+m} (x_k - x_k^o) \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1^o, ..., x_{n+m}^o) = \sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1^o, ..., x_{n+m}^o) dx_k \\
&\approx \sum_{k=1}^{n+m} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, ..., x_{n+m}) dx_k. \qquad \square
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.4 Sovellus: yksi endogeeninen muuttuja

Tarkastellaan yhtälöä

$$f(x, a_1, ..., a_m) = 0, \qquad (a_1, ..., a_m) \in A, \tag{2.9}$$

jossa $f(x, a_1, ..., a_m)$ on derivoituva funktio, x endogeeninen muuttuja, $(a_1, ..., a_m)$ eksogeenisia muuttujia ja A on systeemin määrittelyjoukko. Jos yhtälöllä (2.9) on olemassa ratkaisu, niin se on muotoa [vrt. (2.3)]

$$x = X(a_1, ..., a_m), \qquad (a_1, ..., a_m) \in A, \tag{2.10}$$

missä $X(a_1, ..., a_m)$ on derivoituva funktio. Mitkä ovat funktion X ominaisuudet?

Seurauslause: *Oletetaan, että* $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$. *Ratkaisufunktion* (2.10) *derivaatat voidaan johtaa ottamalla ensiksi funktiosta* (2.9) *kokonaisdifferentiaali (totally differentiating* (2.9)*)*

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial a_k} da_k = 0, \tag{2.11}$$

ja sitten ratkaisemalla tästä suhdeluvut $\frac{dx}{da_k}$ *seuraavasti:*

$$\frac{\partial X}{\partial a_k} = \frac{dx}{da_k} = -\frac{\partial f}{\partial a_k} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x}, \quad k = 1, ..., m.$$

Todistus (heuristinen): Sijoitetaan ratkaisu (2.10) funktioon (2.9), jolloin saadaan

$$f\big(X(a_1, ..., a_m), a_1, ..., a_m\big) = 0.$$

Jos tämän yhtälön vasen puoli $f(X(a), a)$ on yhtä kuin nolla, niin silloin sen derivaattakin muuttujan a_k suhteen on nolla:

$$\frac{df}{da_k} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial a_k} + \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0.$$

Tästä saadaan funktion X derivaatta muuttujan a_k suhteen seuraavasti:

$$\frac{\partial X}{\partial a_k} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial a_k}}{\frac{\partial f}{\partial x}}. \tag{2.12}$$

Sovelletaan nyt implisiittifunktioteoreemaa yhtälöön (2.10):

$$dx = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial X}{\partial a_k} da_k.$$

Sijoittamalla tähän (2.12) kaikilla k:lla saadaan

$$dx = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\frac{\partial f}{\partial a_k}}{\frac{\partial f}{\partial x}} da_k.$$

Kerrotaan molemmin puolin termillä $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial a_k} da_k.$$

Hieman järjestelemällä nähdään että (2.11) pitää paikkansa, kun $a \in A$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial a_k} da_k = 0. \qquad \square$$

2.4.1 Esimerkki 1

> Osoitettava, että yhtälö $a^2 e^x - 2x + a = 0$ määrittelee muuttujan x muuttujan a funktiona pisteen $(x, a) = (0, -1)$ läheisyydessä. Määrättävä tämän funktion derivaatta, kun $a = -1$.

Asetetaan

$$\begin{aligned} f(x, a) &\doteq a^2 e^x - 2x + a \\ f_a(x, a) &= 2ae^x + 1 \\ f_x(x, a) &= a^2 e^x - 2 \end{aligned}$$

Havaitaan ensiksi, että $f(0, -1) = (-1)^2 - 1 = 0$, joten $f(x, a)$ määrittelee muuttujan x muuttujan a funktiona pisteen $(x, a) = (0, -1)$ läheisyydessä. Koska $f_x(0, -1) = (-1)^2 - 2 = -1 \neq 0$, ratkaisufunktion osittaisderivaatta voidaan laskea seurauslauseen avulla. Näin ollen

$$\begin{aligned} 0 &= f_x(0, -1)dx + f_a(0, -1)da = -dx - da \\ \frac{dx}{da} &= -(-1)/(-1) = -1 \end{aligned}$$

2.4.2 Esimerkki 2

Kuluttajan teoriassa indifferenssikäytä on hyötyfunktion tasokäyrä:

$$U(x_1, x_2) = U_0,$$

missä $U_0 > 0$ on vakiohyötytaso ja x_1 ja x_2 ovat hyödykkeiden 1 ja 2 kulutetut määrät. Indifferenssikäyrän kulmakerroin (x_1, x_2)-koordinaatistossa, MRS_{x_1,x_2}, saadaan kokonaisdifferentiaalin avulla seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&U(x_1, x_2) - U_0 = 0 \\
&\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0 \\
&\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\
&MRS_{x_1,x_2} \doteq \left| \frac{dx_2}{dx_1} \right| = \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2}
\end{aligned}
$$

Pisteessä (x_1^o, x_2^o) indifferenssikäyrän kulmakerroin määräytyy seuraavasti:

Rajasubstituutioaste (marginal rate of substitution) MRS_{x_1,x_2} pisteessä (x_1^o, x_2^o) kertoo, kuinka paljon enemmän hyödykkeen 2 kulutuksen x_2 täytyy nousta tasolta x_2^o, jotta hyötytaso pysyisi vakiona silloin kun hyödykkeen 1 kulutus x_1 putoaa yhdellä yksiköllä tasolta x_1^o.

2.4.3 Esimerkki 3

Tuottajan teoriassa samatuotoskäyrä määritellään

$$F(K, L) = Y_0,$$

missä $Y = F(K, L)$ on tuotantofunktio, Y tuotos, K pääoma, L työ ja Y_0 vakiotuotos. Nyt samatuotoskäyrän kulmakerroin (K, L)-koordinaatistossa, MRT_{KL}, saadaan kokonaisdifferentiaalin avulla seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&F(K,L) - Y_0 = 0 \\
&F_K(K,L)dK + F_L(K,L)dL = 0 \\
&\frac{dL}{dK} = -\frac{F_K(K,L)}{F_L(K,L)} \\
&MRT_{KL} \doteq \left|\frac{dL}{dK}\right| = \frac{F_K(K,L)}{F_L(K,L)}
\end{aligned}
$$

Pisteessä (K_o, L_o) samatuotoskäyrän kulmakerroin määräytyy seuraavasti:

Rajamuunnosaste (marginal rate of transformation) MRT_{KL} pisteessä (K_o, L_o) kertoo, kuinka paljon enemmän työpanoksen L täytyy nousta tasolta L_o, jotta tuotannon taso Y pysyisi vakiona silloin kun pääoman K määrä laskee yhdellä yksiköllä tasolta K_o.

Cobb-Douglas funktion $Y = F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ (α ja A vakioita) tapauksessa saadaan

$$MRT_{KL} = \frac{F_K(K,L)}{F_L(K,L)} = \frac{\alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}}{(1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{L}{K}$$

CES-funktion

$$
\begin{aligned}
&Y = F(K,L) = \left[\delta K^{1-1/\sigma} + (1-\delta)L^{1-1/\sigma}\right]^{\sigma/(\sigma-1)} \\
&\delta \text{ ja } \sigma \text{ vakioita, } 0 < \delta < 1,\ \sigma > 0,\ \sigma \neq 1
\end{aligned}
$$

tapauksessa saadaan

$$MRT_{KL} = \frac{F_K(K,L)}{F_L(K,L)} = \frac{\delta(Y/K)^{1/\sigma}}{(1-\delta)(Y/L)^{1/\sigma}} = \frac{\delta}{1-\delta}\left(\frac{L}{K}\right)^{1/\sigma}$$

2.4.4 Esimerkki 4

Olkoon Y kansantulo, C kulutus ja I inveastoinnit. Kulutusfunktio on

$$C = c(Y), \quad 0 < c' < 1,$$

missä c' on rajakulutusalttius. Tasapainossa kaikki tulot joko kulutetaan tai investoidaan:

$$Y = C + I = c(Y) + I. \tag{2.13}$$

Millainen kerroinvaikutus on investoinneilla I?

Yhtälö (2.13) määrittelee kansantulon Y investointien funktiona. Sen kokonaisdifferentiaali on

$$dY = c'(Y)dY + dI.$$

Tästä ratkaistaan Keynesin-Kahnin kerroin:

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - c'(Y)} > 1.$$

Tulotaso nousee enemmän kuin investoinnit (dY/dI>1) ja määrällä 1/(1-rajakulutusalttius).

2.5 Sovellus: useita endogeenisia muuttujia

Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$f_i(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m) = 0, \qquad (a_1, ..., a_m) \in A, \quad i = 1, ..., n, \tag{2.14}$$

jossa $f_i(x_1, ..., x_n, a_1, ..., a_m)$ on derivoituvia funktioita ($i = 1, ..., n$), $(x_1, ..., x_n)$ endogeenisia muuttujia, $(a_1, ..., a_m)$ eksogeenisia muuttujia ja A on systeemin määrittelyjoukko. Jos yhtälöllä (2.14) on olemassa ratkaisu, niin se voidaan ilmaista yhtälöryhmänä seuraavasti [vrt. (2.3)]

$$x_h = X_h(a_1, ..., a_m), \qquad (a_1, ..., a_m) \in A, \quad h = 1, ..., n, \tag{2.15}$$

missä $X_h(a_1, ..., a_m)$ ovat derivoituvia funktioita. Mitkä ovat funktioiden X_h ominaisuudet?

Seurauslause: *Oletetaan, että funktioiden $f_1, ..., f_n$ Jakobin determinantti endogeenisten muuttujien suhteen on nollasta eroava:*

$$D \doteq \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tällöin ratkaisufunktion (2.15) *derivaatat voidaan johtaa ottamalla ensiksi funktioista* (2.14) *kokonaisdifferentiaalit*

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} dx_h + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial a_k} da_k = 0, \quad i = 1, ..., n, \tag{2.16}$$

ja sitten ratkaisemalla suhdeluvut $\frac{dx_h}{da_k}$ *käsittelemällä yhtälöitä* (2.16) *lineaarisena yhtälöryhmänä, jossa muutokset* $dx_1, ..., dx_n$ *ovat endogeenisia muuttujia, muutokset* $da_1, ..., da_m$ *ovat eksogeenisia muuttujia, ja kertoimet* $\frac{\partial f_i}{\partial x_h}$ *ja* $\frac{\partial f_i}{\partial a_k}$ *ovat vakioita.*

Todistus (heuristinen): Soveltamalla implisiittifunktioteoreemaa yhtälöön (2.15) saadaan

$$dx_h = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial X_h}{\partial a_k} da_k. \tag{2.17}$$

Sijoitetaan ratkaisu (2.15) funktioon (2.14), jolloin saadaan

$$f_i\big(X_1(a_1, ..., a_m), ..., X_n(a_1, ..., a_m), a_1, ..., a_m\big) = 0.$$

Jos tämän yhtälön vasen puoli on yhtä kuin nolla, niin silloin sen derivaattakin muuttujan a_k suhteen on nolla:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{df_i}{da_k} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \frac{\partial X_h}{\partial a_k} + \frac{\partial f_i}{\partial a_k}.$$

Kerrotaan tämä termillä da_k ja summataan yli $k = 1, ..., m$:

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \frac{\partial X_h}{\partial a_k} da_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial a_k} da_k = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial X_h}{\partial a_k} da_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial a_k} da_k.$$

Sijoittamalla tähän (2.17) saadaan (2.16):

$$0 = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial X_h}{\partial a_k} da_k}_{dx_h} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial a_k} da_k = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} dx_h + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial a_k} da_k. \qquad \square$$

Kirjoitetaan yhtälöryhmä (2.16) matriisimuotoon:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \cdots \\ dx_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial a_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial a_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial a_1} & \frac{\partial f_n}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial a_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} da_1 \\ da_2 \\ \cdots \\ da_m \end{pmatrix} = 0.$$

Tästä saadaan Cramerin säännön avulla, että

$$dx_h = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial a_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial a_k} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial a_k} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}} da_k.$$

Tämä yhtälö voidaan kirjoittaa osittaisderivaattoina seuraavasti:

$$\frac{\partial x_h}{\partial a_k} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial a_k} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial a_k} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{k-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial a_k} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}},$$

$$h = 1, ..., n, \quad k = 1, ..., m.$$

2.5.1 Esimerkki

Tarkastellaan Hicksin-Hansenin ISLM mallia:

$$L(r, Y) = M/P, \quad L_r < 0, \quad L_Y > 0, \tag{2.18}$$
$$I = f(r), \quad f'(r) < 0, \tag{2.19}$$
$$S = s(Y), \quad 0 < s'(Y) < 1, \tag{2.20}$$
$$I = S, \tag{2.21}$$

missä r on korko, Y tulotaso, S säästäminen ja I investoinnit ovat endogeenisia, ja M rahamäärä ja P hintataso ovat eksogeenisia muuttujia.

- Yhtälö (2.18) sanoo, että rahan reaalinen kysyntä L, joka on koron r laskeva ja tulotason Y nouseva funktio, on yhtä kuin rahan reaalinen tarjonta eli nimellinen rahamäärä M jaettuna hintatasolla.

- Yhtälö (2.19) sanoo, että investoinnit ovat koron laskeva funktio.

- Yhtälö (2.20) on säästämisfunktio.

- Yhtälö (2.21) sanoo, että hyödykemarkkinat ovet tasapainossa silloin kun investoinnit I on yhtä kuin säästäminen S.

Mitä tapahtuu korolle ja tulotasolle, jos keskuspankki lisää rahamäärää M?
Kirjoitetaan systeemi (2.18)-(2.21) kahdeksi yhtälöksi

$$\begin{aligned} &L(r,Y) - M/P = 0, \\ &f(r) - s(Y) = 0. \end{aligned}$$

Muodostetaan näistä yhtälöistä kokonaisdifferentiaalit:

$$\begin{aligned} &L_r(r,Y)dr + L_Y(r,Y)dY - d\Big(\frac{M}{P}\Big) = 0, \\ &f'(r)dr - s'(Y)dY = 0. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan nämä matriisimuotoon:

$$\begin{pmatrix} L_r & L_Y \\ f' & -s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dY \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} d\Big(\frac{M}{P}\Big) = 0.$$

Koska Jacobin determinantti on nollasta eroava,

$$D = \begin{vmatrix} L_r & L_Y \\ f' & -s' \end{vmatrix} = -\underbrace{L_r}_{-}\underbrace{s'}_{+} - \underbrace{f'}_{-}\underbrace{L_Y}_{+} > 0,$$

seurauslauseen avulla on saatavissa ratkaisu:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\big(\frac{M}{P}\big)} &= -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -1 & L_Y \\ 0 & -s' \end{vmatrix} = -\underbrace{\frac{1}{D}}_{+}\underbrace{s'}_{+} < 0, \\ \frac{dY}{d\big(\frac{M}{P}\big)} &= -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} L_r & -1/P \\ f' & 0 \end{vmatrix} = -\underbrace{\frac{1}{D}}_{+}\underbrace{f'}_{-} > 0. \end{aligned}$$

Reaalisen rahamäärän $\frac{M}{P}$ lisäys nostaa tulotasoa Y ja laskee korkotasoa r.

3 Usean muuttujan funktion optimoinnista

3.1 Rajoittamaton optimointi

Tarkastelemme differtioituvaa useamman muuttujan funktiota

$$y = f(x_1, ..., x_n), \quad (x_1, ..., x_n) \in A, \tag{3.1}$$

missä A on muuttujien määrittelyjoukko. Merkitään yksikertaisuuden vuoksi funktion (3.1) osittaisderivaattoja seuraavasti:

$$f_i \doteq \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{ij} \doteq \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., n.$$

Funktion (3.1) Hessin determinantti oletetaan nollasta eroavaksi:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{n1} & f_{n2} & ... & f_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.2}$$

Huomautus. Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ toisen tai useamman asteen osittaisderivaatat voidaan muodostaa derivoimalla tämä funktio muuttujien x_i suhteen missä järjestyksessä tahansa. Näin ollen esim.

$$f_{ij} \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \doteq f_{ji}, \quad f_{ijk} = f_{ikj} = f_{kij} = f_{jik} = f_{ikj} = f_{kji}.$$

Määritelmä. (a) Funktiolla (3.1) on *yksikäsitteinen globaali maksimi (unique global maximum)* pisteessä $(x_1^*, ..., x_n^*) \in A$, jos $f(x_1^*, ..., x_n^*) > f(x_1, ..., x_n)$ kaikilla A:han kuuluvilla pisteillä $(x_1, ..., x_n) \neq (x_1^*, ..., x_n^*)$, ja *yksikäsitteinen globaali minimi (unique global minimum)* pisteessä $(x_1^*, ..., x_n^*) \in A$, jos $f(x_1^*, ..., x_n^*) < f(x_1, ..., x_n)$ kaikilla A:han kuuluvilla pisteillä $(x_1, ..., x_n) \neq (x_1^*, ..., x_n^*)$.
(b) Funktiolla (3.1) on *yksikäsitteinen lokaali maksimi (unique local maximum)* pisteessä $(x_1^*, ..., x_n^*) \in A$, jos $f(x_1^*, ..., x_n^*) > f(x_1, ..., x_n)$ kaikilla A:han kuuluvilla pisteillä, jotka ovat pisteen $(x_1^*, ..., x_n^*)$ lähiympäristössä, ja *yksikäsitteinen lokaali minimi (unique local minimum)* pisteessä $(x_1^*, ..., x_n^*) \in A$, jos $f(x_1^*, ..., x_n^*) < f(x_1, ..., x_n)$ kaikilla A:han kuuluvilla pisteillä, jotka ovat pisteen $(x_1^*, ..., x_n^*)$ lähiympäristössä.

Pisteen $(x_1, ..., x_n) \in A$ sanotaan oevan määrittelyjoukon A reunalla, jos sen ympärillä joka puolella ei ole joukon A pisteitä. Tarkastellaan esimerkiksi lukuja $0 \leq x \leq 100$. Tässä joukossa piste x on reunalla, jos $x = 0$ tai $x = 100$, mutta sisällä, jos $0 < x < 100$.

Määritelmä. Jos maksimi/minimi on määrittelyjoukon A reunalla, niin sitä sanotaan *reunamaksimiksi/reunaminimiksi (boundary maximum/minimum)*. Jos maksimi (minimi) on määrittelyjoukon A sisällä, niin sitä sanotaan *sisämaksimiksi/sisäminimiksi (interior maximum/minimum).*

Yksikäsitteinen globaali optimi (maksimi tai minimi) voidaan löytää seuraavan teoreeman avulla. Sen todistus perustuu neliömuotoihin, mutta sivuutetaan tällä kurssilla.

Teoreema 1 ***(a)*** *Funktiolla* (3.1) *on* ***yksikäsitteinen lokaali sisämaksimi*** *pisteessä* $(x_1^*, ..., x_n^*)$ *silloin ja vain silloin kun*

1. $f_i = 0$ *kaikilla* $i = 1, ..., n$ *(ensimmäisen asteen ehdot),*

2. Hessin determinantin (3.2) *pääminoreilla on vaihtuvat etumerkit seuraavasti (toisen asteen ehdot):*

$$f_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad ... \tag{3.3}$$

$$..., \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{n1} & f_{n2} & ... & f_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} > 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen} \\ < 0, & \text{kun } n \text{ on pariton.} \end{matrix} \tag{3.4}$$

(b) *Funktiolla* (3.1) *on* ***yksikäsitteinen lokaali sisäminimi*** *pisteessä* $(x_1^*, ..., x_n^*)$ *silloin ja vain silloin kun*

1. $f_i = 0$ *kaikilla* $i = 1, ..., n$ *(ensimmäisen asteen ehdot),*

2. Hessin determinantin (3.2) *pääminorit ovat positiivisia (toisen asteen ehdot):*

$$f_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad ..., \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{n1} & f_{n2} & ... & f_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{3.5}$$

Huom.! Edellinen teoreema pätee vaikka muuttujat $x_1, ..., x_n$ pantaisiin eri järjestykseen. Näin ollen jos toisen asteen ehdot saadaan täyttymään jollakin järjestyksellä, niin silloin lokaali optimi on yksikäsitteinen.

Edelläolevassa teoreemassa ehto (3.4) on yhtäpitävä sen kanssa että funktio (3.1) on *aidosti konkaavi*, ja ehto (3.5) yhtäpitävä sen kanssa että funktio (3.1) on *aidosti konveksi.*

3.1.1 Esimerkki

Tarkastellaan funktiota

$$y = f(x_1, x_2, x_3) \doteq 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1 - 6x_2 - 6x_3, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{R}^3. \tag{3.6}$$

Ensimmäisen asteen ehdot ovat

$$f_1 = 4x_1 - 4 = 0, \quad f_2 = 2x_2 - 6 = 0, \quad f_3 = 6x_3 - 6 = 0.$$

Näistä saadaan ratkaisut $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ and $x_3 = 1$. Pääminorit 1. asteen ehdot toteuttavassa pisteessä $(1, 3, 1)$ ovat

$$f_{11} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 48 > 0.$$

Koska nämä kaikki ovat positiivisia, funktiolla (3.6) on yksikäsitteinen lokaali minimi pisteessä $(1, 3, 1)$.

3.2 Optimointi yhden yhtälön rajoittamana

Tarkastelemme nyt funktion (3.1) optimointia (maksimointia tai minimointia), kun rajoitteena on yhtälö

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \tag{3.7}$$

jossa g on differentioituva funktio. Merkitään yksikertaisuuden vuoksi funktion (3.7) osittaisderivaattoja seuraavasti:

$$g_i \doteq \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad g_{ij} \doteq \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = 1, ..., n; \quad j = 1, ..., n.$$

Rajoitteella (3.7) ei ole mitään merkitystä, jos ei ole olemassa edes yhtä endogeenista muuttujaa, josta funktio $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ on riippuvainen. Jotta toisen asteen ehdot voitaisiin kirjoittaa mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon, oletetaan

$$g_1 \neq 0.$$

Muissa suhteissa endogeenisten muuttujien järjestyksellä ei ole väliä.

Suoraviivaisin tapa on ratkaista rajoitteesta (3.7) jokin muuttujista (esim. x_1) muiden muuttujien (esim. $x_2, ..., x_n$) funktiona:

$$x_1 = X(x_2, ..., x_n). \tag{3.8}$$

Jos ratkaisua (3.8) ei löydy eksplisiittisesti, niin sen voi etsiä implisiittisesti komparatiivisen statiikan avulla [ks. moniste "Komparatiivinen statiikka", tämä luentosarja]. Sijoittamalla (3.8) saadaan maksimoitava funktio (3.1) muotoon

$$y = f\big(X(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n\big). \tag{3.9}$$

Funktio (3.9) voidaan nyt maksimoida ilman rajoitetta. Tässä voidaan menetellä samalla tavalla kuin kappaleessa 3.1.

Joissakin taloudellisissa sovelluksissa ratkaisun (3.8) muodostaminen ei ole tarkoituksenmukaista, koska se voi esimerkiksi tehdä mallin hankalammin tulkittavaksi. Tällöin joudutaan edellä esitellyn sijoitusmenetelmän sijasta käyttämään *Lagrangen menetelmää*, jonka esittelyyn käytämme tämän kappaleen loppuosan.

Funktion (3.1) optimointi rajoitteena (3.7) voidaan kääntää optimoinniksi ilman rajoitetta muodostamalla *Lagrangen funktio*

$$L(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) = f(x_1, ..., x_n) + x_{n+1} g(x_1, ..., x_n), \tag{3.10}$$

missä x_{n+1} on *Lagrangen kerroin*. Merkitään yksikertaisuuden vuoksi funktion (3.10) osittaisderivaattoja seuraavasti:

$$L_i \doteq \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad L_{ij} \doteq \frac{\partial L}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = 1, ..., n+1; \quad j = 1, ..., n+1.$$

Lagrangen funktiota (3.10) maksimoidaan nyt muuttujien $(x_1, ..., x_{n+1})$ avulla ilman rajoitetta. Tässä voidaan menetellä pienin muutoksen samalla tavoin kuin kappaleessa 3.1.

Rajoitettu Hessin determinantti on muotoa

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} & L_{1,n+1} \\ L_{21} & L_{22} & ... & L_{2n} & L_{2,n+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ L_{n1} & L_{n2} & ... & L_{nn} & L_{n,n+1} \\ L_{n+1,1} & L_{n+1,2} & ... & L_{n+1,n} & L_{n+1,n+1} \end{vmatrix} \tag{3.11}$$

$$= \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} & g_1 \\ L_{21} & L_{22} & ... & L_{2n} & g_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ L_{n1} & L_{n2} & ... & L_{nn} & g_n \\ g_1 & g_2 & ... & g_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & ... & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} & ... & L_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ g_n & L_{n1} & L_{n2} & ... & L_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

Teoreema 2 ***(a)*** *Funktiolla* (3.1) *on* ***yksikäsitteinen lokaali sisämaksimi*** *rajoitteena* (3.7) *pisteessä* $(x_1^*, ..., x_n^*)$ *silloin ja vain silloin kun*

1. $L_i = 0$ *kaikilla* $i = 1, ..., n$ *(ensimmäisen asteen ehdot),*

2. Rajoitetun Hessin determinantin (3.12) *pääminoreilla on vaihtuvat etumerkit seuraavasti (toisen asteen ehdot):*

$$\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_1 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ g_3 & L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad ...$$

$$..., \quad \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & ... & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} & ... & L_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ g_3 & L_{n3} & L_{n3} & ... & L_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{ll} > 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen} \\ < 0, & \text{kun } n \text{ on pariton.} \end{array}$$

(b) *Funktiolla* (3.1) *on* ***yksikäsitteinen lokaali sisäminimi*** *rajoitteena* (3.7) *pisteessä* $(x_1^*, ..., x_n^*)$ *silloin ja vain silloin kun*

1. $L_i = 0$ *kaikilla* $i = 1, ..., n$ *(ensimmäisen asteen ehdot),*

2. Rajoitetun Hessin determinantin (3.12) *pääminorit ovat negatiivisia (toisen asteen ehdot):*

$$\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_1 & L_{12} & L_{22} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ g_3 & L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix} < 0, \quad ...$$

$$..., \quad \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & ... & g_n \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} & ... & L_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ g_3 & L_{n3} & L_{n3} & ... & L_{nn} \end{vmatrix} < 0.$$

3.2.1 Esimerkki 1

Etsi funktion $y = xz$ ääriarvo rajoitteena $x + z = 8$.

Ratkaistaan tämä ongelma ensiksi sijoitusmenettelyllä. Ratkaistaan rajoite muotoon $z = 8 - x$ ja sijoitetaan tavoitefunktioon, jolloin saadaan

$$y(x) = x(8 - x).$$

Ensimmäisen ja toisen asteen ehdoista

$$\frac{dy}{dx} = 8 - 2x = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2 < 0.$$

nähdään, että funktiolla on annetuissa rajoissa maksimi pisteessä $x = \frac{8}{2} = 4$. Funktion maksimiarvo on $y(4) = 4^2 = 16$.

Seuraavaksi ratkaistaan sama Lagrangen menetelmällä. Muodotetaan Lagrangen funktio

$$L(x, z, \lambda) = xz + \lambda[8 - x - z],$$

missä λ on Lagrangen kerroin. Ensimmäisen asteen ehdot:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = z - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = x - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 8 - x - z = 0.$$

Näistä saadaan $x = z = \lambda = \frac{8}{2} = 4$. Muodostetaan rajoitettu Hessin determinantti:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \lambda} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 > 0$$

Koska tämä on positiivinen, niin ääriarvo $x = z = 4$ on maksimi.

3.2.2 Esimerkki 2

Optimoidaan funktiota

$$\begin{aligned} &y = f(x_1, x_2, x_3) \doteq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_1x_2x_3, \\ &(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{R}^3, \end{aligned} \tag{3.13}$$

rajoitteena

$$g(x_1, x_2, x_3) \doteq x_1 + x_2 + x_3 - 9 = 0. \tag{3.14}$$

Tämän ongelman Lagrangen funktio on

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_1x_2x_3 \\ + x_4[x_1 + x_2 + x_3 - 9]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ensimmäisen asteen ehdot ovat

$$\begin{aligned} L_1 &= 2x_1 - 2 - 2x_2x_3 - x_4 = 0, \\ L_2 &= 2x_2 - 2 - 2x_1x_3 - x_4 = 0, \\ L_3 &= 2x_3 - 2 - 2x_1x_2 - x_4 = 0, \\ L_4 &= x_1 + x_2 + x_3 - 9 = 0. \end{aligned}$$

Tästä saadaan ratkaisu $x_1 = x_2 = x_3 = 3$.

Rajoitettu Hessin determinantti ensimmäisen asteen ehdot toteuttavassa pisteessä $(3, 3, 3)$ on muotoa

$$\begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_2 & L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ g_3 & L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2x_3 & -2x_2 \\ 1 & -2x_3 & 2 & -2x_1 \\ 1 & -2x_2 & -2x_1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -6 & -6 \\ 1 & -6 & 2 & -6 \\ 1 & -6 & -6 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -192 < 0.$$

Sen pääminori on

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -16 < 0.$$

Koska molemmat determinantit ovat negatiivisia, funktiolla (3.13) on yhtälön (3.14) antamissa rajoissa minimi pisteessä $(3, 3, 3)$.

3.2.3 Esimerkki 3

Kuluttaja valitsee kulutuksensa (c_1, c_2) maksimoidakseen hyötyä

$$U(c_1, c_2), \quad (c_1, c_2) \in \mathcal{R}^2, \tag{3.16}$$

missä c_1 on hyödykkeen 1 ja c_2 on hyödykkeen 2 kulutus, budjettirajoitteena

$$p_1c_1 + p_2c_2 = I, \tag{3.17}$$

missä p_1 ja p_2 ovat hyödykkeiden 1 ja 2 hintoja ja I tulot. Hyötyfunktiolla (3.16) on tavalliset ominaisuudet

$$\frac{\partial^2 U}{\partial c_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c_2^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial c_1 \partial c_2} > 0.$$

Tämän ongelman Lagrangen funktio on

$$L(c_1, c_2, \lambda) = U(c_1, c_2) + \lambda[I - p_1c_1 - p_2c_2], \tag{3.18}$$

missä λ on Lagrangen kerroin. Ensimmäisen asteen ehdot ovat

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \frac{\partial U}{\partial c_1} - p_1\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial c_2} = \frac{\partial U}{\partial c_2} - p_2\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1c_1 - p_2c_2 = 0.$$

Rajoitettu Hessin determinantti on muotoa

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & -p_1 \\ -p_1 & \frac{\partial^2 U}{\partial c_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_1 \partial c_2} \\ -p_2 & \frac{\partial^2 U}{\partial c_1 \partial c_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial c_2^2} \end{vmatrix} = \underbrace{-p_1^2}_{-} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial c_2^2}}_{-} + \underbrace{2p_1p_2}_{+} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial c_1 \partial c_2}}_{+} \underbrace{-p_2^2}_{-} \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial c_1^2}}_{-} > 0.$$

Täten hyötyfunktiolla (3.16) on budjetin (3.17) rajoissa maksimi.

Lagrangen funktion (3.18) maksimiarvoa sanotaan myös *epäsuoraksi hyötyfunktioksi* $V(I, p_1, p_2)$, joka kertoo hyötytason tulojen I ja hintojen funktiona. Sillä om sama arvo kuin kuluttajan hyödyllä optimissa:

$$V(I, p_1, p_2) = L(c_1^*, c_2^*, \lambda) = U(c_1^*, c_2^*) + \lambda\underbrace{[I - p_1c_1^* - p_2c_2^*]}_{=0,\,(3.17)} = U(c_1^*, c_2^*),$$

missä c_1^* ja c_2^* ovat kuluttajan valitsemat optimiarvot kulutukselle c_1 ja c_2. Koska 1. asteen ehtojen nojalla $\partial L/\partial c_1 = \partial L/\partial c_2 = 0$, vaikutuksia c_1^*:n ja c_2^*:n kautta ei tarvitse ottaa huomioon. Koska $\partial V/\partial I = \lambda$, Lagrangen kerrointa λ voidaan pitää tulon rajahyötynä – yksi euro tuloihin I lisää hyötytasoa λ:n verran.

Klassinen tulos: Epäsuoran hyötyfunktion derivaatta hyödykkeen i hinnan p_i suhteen on sama kuin minus kuluttajan rajahyöty λ kertaa saman hyödykkeen i kulutus c_i:

$$\partial V/\partial p_i = -\lambda c_i^* = -\lambda c_i.$$

3.2.4 Esimerkki 4

Olkoon tuotantokustannukset $wL + rK$ ja tuotantofuntio $Y = F(K, L)$, missä Y tuotos, L työ, K pääoma, w palkka ja r korko (lopputuoteen hinta on valittu ykköseksi). Tuottaja minimoi kustannuksiaan $wL + rK$ valitsemalla panoksensa K ja L siten, että tuotanto Y pidetään annetulla tasolla:

$$F(K, L) = Y.$$

Tämän ongelman Lagrangen funktion on

$$Q(K, L, w, r, Y) = wL + rK + \mu[Y - F(K, L)], \tag{3.19}$$

missä μ on Lagrangen kerroin. Emsimmäisen asteen ehdot ovat

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = r - \mu F_K(K, L) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = r - \mu F_L(K, L) = 0, \tag{3.20}$$

missä $F_K \doteq \partial L/\partial K$ ja $F_L \doteq \partial L/\partial L$.

Lagrangen funktion (3.19) minimiarvoa sanotaan *(kokonais) kustannusfunktioksi*:

$$C(w, r, Y) = Q(K^*, L^*, w, r, Y) = wL^* + rK^* + \mu[Y - F(K^*, L^*)], \tag{3.21}$$

missä K^* ja L^* ovat pääoman ja työn optimiarvot. Koska 1. asteen ehtojen nojalla $\partial Q/\partial L = \partial Q/\partial K = 0$, vaikutuksia K^*:n ja L^*:n kautta ei tarvitse ottaa huomioon. Koska $\partial C/\partial Y = \mu$, Lagrangen kerrointa μ voidaan pitää rajakustannuksina – yksi yksikkö tuotantoa Y lisää kustannuksia μ yksikköä.

Klassinen tulos: Kustannusfunktion derivaatta panoksen L (K) hinnan w (r) suhteen on tämän panoksen kysyntä L (K):

$$\frac{\partial C}{\partial w} = L^* = L, \quad \frac{\partial C}{\partial r} = K^* = K.$$

3.3 Optimointi monen yhtälön rajoittamana

Edellisessä kappaleessa esitelty teoria optimoinnista yhden yhtälön rajoittamana voidaan yleistää koskemaan optimointia, jossa rajoittavia yhtälöitä on mielivaltainen määrä m:

$$g^h(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad h = 1, ..., m, \tag{3.22}$$

jossa g^h on differentioituva funktio. Merkitään yksikertaisuuden vuoksi funktioiden (3.22) osittaisderivaattoja seuraavasti:

$$g_i^h \doteq \frac{\partial g^h}{\partial x_i}, \quad g_{ij}^h \doteq \frac{\partial g^h}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., n, \quad h = 1, ..., m < n.$$

Oletetaan, että rajoitteiden (3.22) Jacobin determinantti m;n ensimmäisen endogeenisen muuttujan suhteen on nollasta eroava:

$$\begin{vmatrix} g_1^1 & g_2^1 & \cdots & g_n^1 \\ g_1^2 & g_2^2 & \cdots & g_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1^n & g_2^n & \cdots & g_n^n \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.23}$$

Tämä takaa sen, että kaikilla rajoitteilla on optimoinnin kannalta jotain merkitystä. Endogeenisten muuttujien järjestys voidaan vapaasti valita edellyttäen, että (3.23) pysyy voimassa.

Suoraviivaisin tapa on ratkaista rajoitteesta (3.22) m muuttujaa (esim. $x_1, ..., x_m$) muiden muuttujien (esim. $x_{m+1}, ..., x_n$) funktiona:

$$x_h = X^h(x_{m+1}, ..., x_n), \quad h = 1, ..., m. \tag{3.24}$$

Jos ratkaisua (3.24) ei löydy eksplisiittisesti, niin sen voi etsiä implisiittisesti komparatiivisen statiikan avulla [ks. moniste "Komparatiivinen statiikka", tämä luentosarja]. Sijoittamalla (3.24) saadaan (3.1) muotoon

$$y = f\big(X^1(x_{m+1}, ..., x_n), ..., X^m(x_{m+1}, ..., x_n), x_{m+1}, ..., x_n\big). \tag{3.25}$$

Funktio (3.25) voidaan nyt maksimoida ilman rajoitetta. Tässä voidaan menetellä samalla tavalla kuin kappaleessa 3.1.

Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää *Lagrangen menetelmää* seuraavasti. Funktion (3.1) optimointi rajoitteina (3.22) voidaan kääntää optimoinniksi ilman rajoitetta muodostamalla *Lagrangen funktio*

$$L(x_1, ..., x_{n+m}) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{h=1}^{m} x_{n+h} g^h(x_1, ..., x_n), \tag{3.26}$$

missä $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ ovat *Lagrangen kertoimia*. Merkitään yksikertaisuuden vuoksi funktion (3.26) osittaisderivaattoja seuraavasti:

$$L_i \doteq \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad L_{ij} \doteq \frac{\partial L}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = 1, ..., n+m; \quad j = 1, ..., n+m.$$

Lagrangen funktiota (3.26) maksimoidaan nyt muuttujien $(x_1, ..., x_{n+m})$ avulla ilman rajoitetta, samoin kuin kappaleessa 3.1.

Rajoitettu Hessin determinantti on muotoa

$$\begin{vmatrix} L_{11} & ... & L_{1,n+m} \\ ... & ... & ... \\ L_{n+m,1} & ... & L_{n+m,n+m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & ... & L_{1n} & g_1^1 & ... & g_1^m \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ L_{n1} & ... & L_{nn} & g_n^1 & ... & g_n^m \\ g_1^1 & ... & g_n^1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ g_1^m & ... & g_n^m & 0 & ... & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & ... & 0 & g_1^1 & ... & g_n^1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & g_1^m & ... & g_n^m \\ g_1^1 & ... & g_1^m & L_{11} & ... & L_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ g_n^1 & ... & g_n^m & L_{n1} & ... & L_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.27}$$

Teoreema 3 ***(a)*** *Funktiolla* (3.1) *on* ***yksikäsitteinen lokaali sisämaksimi*** *rajoitteena* (3.22) *pisteessä* $(x_1^*, ..., x_n^*)$ *silloin ja vain silloin kun*

1. $L_i = 0$ *kaikilla* $i = 1, ..., n$ *(ensimmäisen asteen ehdot),* *2. Rajoitetun Hessin determinantin* (3.27) *pääminorilla numero* $(2m+1)$ *on sama etumerkki kuin termillä* $(-1)^{m+1}$*, ja siitä eteenpäin etumerkit vaihtuvat niin että pääminorilla numero* $(2m+s)$ *on sama etumerkki kuin termillä* $(-1)^{m+s}$.

(b) *Funktiolla* (3.1) *on* ***yksikäsitteinen lokaali sisäminimi*** *rajoitteena* (3.22) *pisteessä* $(x_1^*, ..., x_n^*)$ *silloin ja vain silloin kun*

1. $L_i = 0$ *kaikilla* $i = 1, ..., n$ *(ensimmäisen asteen ehdot),*

2. Rajoitetun Hessin determinantin (3.27) *pääminorit numerosta* $(2m+1)$ *eteenpäin ovat samaa merkkiä kuin* $(-1)^m$ *(toisen asteen ehdot).*

Huom.! Kaikki rajoitetun Hessin determinantin (3.27) pääminorit, joiden jäjestysluku on pienempi kuin $(2m+1)$, ovat nollia.

3.3.1 Esimerkki

Tarkastellaan kotitaloutta, joka kuluttaa neljää hyödykettä ja maksimoi hyötyfunktiota

$$U(c_1, c_2, c_3, c_4), \quad (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathcal{R}^4, \tag{3.28}$$

missä c_i on hyödykkeen i kulutus. Funktio (3.28) oletetaan kahdesti derivoituvaksi. Merkitään yksikertaisuuden vuoksi

$$U_i \doteq \frac{\partial U}{\partial c_i}, \quad U_{ij} \doteq \frac{\partial U}{\partial c_i \partial c_j}, \quad i \in \{1,2,3,4\}, \quad j \in \{1,2,3,4\}.$$

Kotitalouden budjettirajoite on

$$p_1c_1 + p_2c_2 + p_3c_3 + p_4c_4 = I, \tag{3.29}$$

missä I on tulot ja p_i hyödykkeen i hinta. Tamperelaisen taloustieteilijän Ilari Tyrnin mukaan hyödykkeiden kuluttaminen ei vie ainoastaan rahaa, vaan myös aikaa. Niinpa oletetaan, että kotitalouden aikavaranto Q on yksikköä ja hyödykkeen i kuluttamiseen tarvitaan q_i aikayksikköä. Tästä tulee kotitaloudelle aikarajoite

$$q_1c_1 + q_2c_2 + q_3c_3 + q_4c_4 = Q. \tag{3.30}$$

Kotitalous maksimoi hyötyään (3.28) siten, että sekä budjetti- (3.29) että aikarajoite (3.30) ovat yhtä aikaa voimassa. Tästä Lagrangen funktio

$$\begin{aligned} L(c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda, \mu) \doteq\ & U(c_1, c_2, c_3, c_4) + \lambda[I - p_1c_1 - p_2c_2 - p_3c_3 - p_4c_4] \\ & + \mu[Q - q_1c_1 - q_2c_2 - q_3c_3 - q_4c_4], \end{aligned}$$

missä Lagrangen kerroin λ voidaan tulkita tulon I ja kerroin μ ajan Q rajahyödyksi. Ensimmäisen asteen ehdot ovat

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial c_i} &= U_i - \lambda p_i - \mu q_i = 0, \quad i = 1, ..., 4, \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= I - p_1 c_1 - p_2 c_2 - p_3 c_3 - p_4 c_4 = 0, \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= Q - q_1 c_1 - q_2 c_2 - q_3 c_3 - q_4 c_4 = 0.
\end{aligned}$$

Rajoitettu Hessin determinantti on muotoa

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\
0 & 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\
p_1 & q_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
p_2 & q_2 & U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\
p_3 & q_3 & U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\
p_4 & q_4 & U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44}
\end{vmatrix}$$

Toisen asteen ehdot hyödyn maksimoinnille ovat voimassa, jos pääminorilla numero $(2 \cdot 2 + 1) = 5$ on sama etumerkki kuin termillä $(-1)^{2+1}$ ja seuraavalla on vastaikkainen etumerkki:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\
0 & 0 & q_1 & q_2 & q_3 \\
p_1 & q_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\
p_2 & q_2 & U_{21} & U_{22} & U_{23} \\
p_3 & q_3 & U_{31} & U_{32} & U_{33}
\end{vmatrix} < 0, \quad
\begin{vmatrix}
0 & 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\
0 & 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\
p_1 & q_1 & U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\
p_2 & q_2 & U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\
p_3 & q_3 & U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\
p_4 & q_4 & U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44}
\end{vmatrix} > 0.$$

3.4 Optimointi epäyhtälöiden rajoittamana

Tarkastelemme nyt funktion (3.1) maksimointia, kun rajoitteina ovat epäyhtälöt

$$g^h(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \quad h = 1, ..., m, \tag{3.31}$$

jossa g^h on differentioituva funktio. Merkitään yksikertaisuuden vuoksi funktioiden (3.22) osittaisderivaattoja seuraavasti:

$$g_i^h \doteq \frac{\partial g^h}{\partial x_i}, \quad g_{ij}^h \doteq \frac{\partial g^h}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = 1, ..., n, \quad j = 1, ..., n, \quad h = 1, ..., m.$$

Tämä ongelma ratkaistaan *Kuhnin-Tuckerin menetelmällä* seuraavasti. Muodostetaan Lagrangen funktio

$$L(x_1, ..., x_{n+m}) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{h=1}^{m} x_{n+h} g^h(x_1, ..., x_n). \tag{3.32}$$

Merkitään yksikertaisuuden vuoksi funktion (3.32) osittaisderivaattoja seuraavasti:

$$L_i \doteq \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad L_{ij} \doteq \frac{\partial L}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i = 1, ..., n+m; \quad j = 1, ..., n+m.$$

Ensimmäisen asteen ehdot ovat nyt muotoa

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \text{ kun } i\text{=}1,...,n, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = 0 \text{ ja } x_i \geq 0, \text{ kun } i\text{=}n\text{+}1,...,n\text{+}m. \tag{3.33}$$

Muuttujia $(x_{n+1}, ..., x_{n+m})$ koskevia ehtoja sanotaan *Kuhnin-Tuckerin ehdoiksi.* Tämä yleistää näppärästi aikaisemmin opitun teorian:

- Jos rajoite ei ole sitova, $g^h(x_1, ..., x_n) > 0$, niin silloin vastaava Lagrangen kerroin on nolla, $x_{n+h} = 0$. Tällöin optimointi tehdään ikään kuin rajoitetta ei olisikaan (vrt. kappale 3.1).
- Jos rajoite on sitova, $g^h(x_1, ..., x_n) = 0$, niin silloin x_{n+h} voi saada nollasta poikkeavia arvoja. Tällöin optimointi tehdään kuten yhtälörajoitteen tapauksessa.

Huom. 1 Rajoitteiden $g^h \geq 0$ epäyhtälön suunnan vaihtaminen kääntää Kuhnin-Tuckerin $x_i \geq 0$ epäyhtälöiden suunnan! Jos funktiota (3.1) maksimoidaan ja rajoitteet ovat (3.31):n sijasta muotoa

$$g^h(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0, \quad h = 1, ..., m, \tag{3.34}$$

niin silloin ensimmäisen asteen ehdot ovat (3.33):n sijasta muotoa

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \text{ kun } i\text{=}1,...,n, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = 0 \text{ ja } x_i \leq 0, \text{ kun } i\text{=}n\text{+}1,...,n\text{+}m. \tag{3.35}$$

TODISTUS: Kerrotaan rajoitteet (3.34) (-1):llä, jolloin saadaan

$$-g^h(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \quad h = 1, ..., m. \tag{3.36}$$

Maksimoidaan nyt funktiota (3.1) rajoitteina (3.36). Lagrangen funktioksi tulee

$$L(x_1, ..., x_{n+m}) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{h=1}^{m} \tilde{x}_{n+h}[-g^h(x_1, ..., x_n)], \tag{3.37}$$

jossa $\tilde{x}_{n+1}, ..., \tilde{x}_{n+m}$ ovat Lagrangen kertoimia. Tällöin ensimmäisen asteen ehdoiksi tulee

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \text{ kun } i\text{=}1,...,n, \quad \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}_i} \tilde{x}_i = 0 \text{ ja } \tilde{x}_i \geq 0, \text{ kun } i\text{=}n\text{+}1,...,n\text{+}m. \tag{3.38}$$

Määrittelemällä uudet muuttujat $x_{n+h} = -\tilde{x}_{n+h}$ ja sijoittamalla nämä (3.37):een ja (3.38):een saadaan Lagrangen funktio (3.32) ja ensimmmäisen asteen ehdot (3.35).

Huom. 2 Maksimoinnin vaihtaminen minimoinniksi kääntää Kuhnin-Tuckerin $x_i \geq 0$ epäyhtälöiden suunnan! Jos funktion (3.1):n *minimoidaan* rajoitteena (3.31), niin silloin ensimmäisen asteen ehdot ovat (3.33):n sijasta

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \text{ kun } i\text{=}1,...,n, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = 0 \text{ ja } x_i \leq 0, \text{ kun } i\text{=}1,...,n\text{+}m. \tag{3.39}$$

Todistus: Funktion (3.1):n minimimointi rajoitteena (3.31) on sama asia kuin funktion $-f(x_1, ..., x_n)$ maksimointi rajoitteena (3.31). Tätä vastaava maksimoitava Lagrangen funktio on

$$\tilde{L}(x_1, ..., x_{n+m}) = -f(x_1, ..., x_n) + \sum_{h=1}^{m} \tilde{x}_{n+h} g^h(x_1, ..., x_n), \tag{3.40}$$

jossa $\tilde{x}_{n+1}, ..., \tilde{x}_{n+m}$ ovat Lagrangen kertoimia. Tätä vastaavat ensimmäisen asteen ehdot ovat

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \text{ kun } i\text{=}1,...,n, \quad \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}_i} \tilde{x}_i = 0 \text{ ja } \tilde{x}_i \geq 0, \text{ kun } i\text{=}n\text{+}1,...,n\text{+}m. \tag{3.41}$$

Funktion (3.40) maksimointia vastaa funktion

$$\begin{aligned} L(x_1, ..., x_{n+m}) &\doteq -\tilde{L}(x_1, ..., x_{n+m}) \\ &= f(x_1, ..., x_n) + \sum_{h=1}^{m} (-\tilde{x}_{n+h}) g^h(x_1, ..., x_n) \end{aligned} \tag{3.42}$$

minimointi. Määrittelemällä uudet muuttujat $x_{n+h} = -\tilde{x}_{n+h}$ ja sijoittamalla nämä (3.41):een ja (3.42):een saadaan Lagrangen funktio (3.32) ja ensimmmäisen asteen ehdot (3.39).

Huom. 3 Huomautuksista 1 ja 2 seuraa, että jos funktiota (3.1) minimoidaan rajoitteilla

$$g^h(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0, \quad h = 1, ..., m,$$

niin silloin ensimmäisen asteen ehdot ovat

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \text{ kun } i\text{=}1,...,n, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} x_i = 0 \text{ ja } x_i \geq 0, \text{ kun } i\text{=}1,...,n\text{+}m.$$

3.4.1 Toisen asteen ehdot

Optimoinnista epäyhtälörajoitteella on vaikea antaa mitään yleipäteviä toisen asteen ehtoja. Monissa taloudellisissa malleissa toisen asteen ehtojen olemassaolo taataan seuraavasti:

(a) Olkoon tarkoituksena on maksimoida funktiota (3.1) rajoitteina (3.31). Tällöin välttämättömät ehdot (3.33) ovat samalla riittävät ehdot, jos sekä tavoitefunktio (3.1) että rajoitefunktiot (3.31) ovat konkaaveja, so. jos niiden Hessin determinanttien pääminorit toteuttavat ehdot (3.4).

(b) Olkoon tarkoituksena on minimoida funktiota (3.1) rajoitteina (3.31). Tällöin välttämättömät ehdot (3.33) ovat samalla riittävät ehdot, jos sekä tavoitefunktio (3.1) että rajoitefunktiot (3.31) ovat konvekseja, so. jos niiden Hessin determinanttien pääminorit toteuttavat ehdot (3.5).

3.4.2 Esimerkki 1

Osoita, että on aivan sama, maksimoidaanko funktiota $f(x_1, ..., x_n)$ yhtälörajoitteella $g(x_1, ..., x_n) = 0$ vai maksimoidaanko sitä epäyhtälörajoitteilla $g(x_1, ..., x_n) \geq 0$ ja $g(x_1, ..., x_n) \leq 0$, kun $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$ ja $\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$.

Lagrangen funktio yhtälörajoitteen tapauksessa:

$$L = f(x_1, ..., x_n) + \lambda g(x_1, ..., x_n).$$

Emsimmäisen asteen ehdot:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, ..., n, \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, ..., x_n) = 0. \tag{3.44}$$

Lagrangen funktio epäyhtälörajoitteiden tapauksessa:

$$\begin{aligned} L &= f(x_1, ..., x_n) + \lambda_1 g(x_1, ..., x_n) + \lambda_2[-g(x_1, ..., x_n)] \\ &= f(x_1, ..., x_n) + (\lambda_1 - \lambda_2) g(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Emsimmäisen asteen ehdot:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, ..., n, \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \lambda_1 = \lambda_1 g(x_1, ..., x_n) = 0, \quad \lambda_1 \geq 0, \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \lambda_2 = \lambda_2 g(x_1, ..., x_n) = 0, \quad \lambda_2 \geq 0. \tag{3.47}$$

Koska $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$ ja $\frac{\partial g}{\partial x_1} \neq 0$, ehdon (3.45) nojalla jomman kumman muuttujista λ_1 ja λ_2 täytyy olla nollasta eroava. Jos $\lambda_1 > 0$, niin silloin (3.46):n mukaan $g(x_1, ..., x_n) = 0$, ja jos $\lambda_2 > 0$, niin silloin (3.47):n mukaan $g(x_1, ..., x_n) = 0$. Määritellään muuttuja $\lambda \doteq \lambda_1 - \lambda_2$, jolloin ehdot (3.45) saadaan muotoon (3.43). Näin ollen $g(x_1, ..., x_n) = 0$, ja ehto (3.44) pitää aina paikkansa. Koska molemissa tapauksissa ensimmäisen asteen ehdot ovat täysin samat, ne johtavat täysin samaan tulokseen.

3.4.3 Esimerkki 2

Minimoitava $f(x, y) = x^2 + y^2$ rajoitteena $x + y \geq 1$.

Lagrangen funktio:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda[1 - x - y].$$

Ensimmäisen asteen ehdot:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda = [1 - x - y]\lambda = 0, \quad \lambda \geq 0. \tag{3.48}$$

Tarkastellaan erikseen kahta tapausta: rajoittamatonta optimia $\lambda = 0$ ja rajoitettua optimia $\lambda > 0$.

Jos $\lambda = 0$, niin silloin (3.48):n perusteella $x = y = 0$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa rajoitteen $x + y \geq 1$ kanssa, joten $\lambda = 0$ ei ole mahdollista. Koska $\lambda > 0$, ehdot (3.48) muuttuvat yhtälörajoitemuotoon:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x - y = 0. \tag{3.49}$$

Tästä kolmen yhtälön yhtälöryhmästä ratkaistaan $x = y = \frac{1}{2}$ ja $\lambda = 1$. Sijoittamalla takaisin tavoitefunktioon rajoitetuksi minimiksi

$$f\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \tag{3.50}$$

Yhtälöiden (3.49) perusteella

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+2}(-1)(-2) + (-1)^{2+2}(-1)2 = -4 < 0, \end{aligned}$$

joten (3.50) on lokaali minimi.

3.4.4 Esimerkki 3

Maksimoitava

$$f(x,y) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14 \tag{3.51}$$

rajoitteena $x + y \leq 50$.

Lagrangen funktio:

$$L(x,y,\lambda) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14 + \lambda[50 - x - y].$$

Ensimmäisen asteen ehdot:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x} = 64 - 4x + 4y - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4x - 8y + 32 - \lambda = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda = [50 - x - y]\lambda = 0, \quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Tarkastellaan erikseen kahta tapausta: rajoittamatonta optimia $\lambda = 0$ ja rajoitettua optimia $\lambda > 0$.

Jos $\lambda = 0$, niin silloin

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 64 - 4x + 4y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4x - 8y + 32 = 0. \tag{3.53}$$

Näistä ratkaistaan $x = 40$ ja $y = 24$. Sijoittamalla takaisin (3.51):een saadaan rajoittamattomaksi optimiksi

$$f(40, 24) = 1650. \tag{3.54}$$

Yhtälöiden (3.52):n perusteella

$$L_{xx} = -4 < 0, \qquad \begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 32 - 16 = 16 > 0,$$

joten (3.54) on lokaali maksimi.

Jos $\lambda > 0$, niin silloin ehdot (3.52) muuttuvat yhtälörajoitemuotoon:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x} = 64 - 4x + 4y - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4x - 8y + 32 - \lambda = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 50 - x - y = 0. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Tästä kolmen yhtälön yhtälöryhmästä ratkaistaan $x = 31.6$, $y = 18.4$ ja $\lambda = 11.2$. Sijoittamalla takaisin (3.51):een saadaan rajoitetuksi maksimiksi

$$f(31.6\,,\, 18.4) = 1571.6. \tag{3.56}$$

Yhtälöiden (3.55) perusteella

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -8 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+2}(-1)(8+4) + (-1)^{2+2}(-1)(-4-4) = 12 + 8 = 20 > 0, \end{aligned}$$

joten (3.56) on lokaali maksimi.

Koska rajoittamaton maksimi (3.54) on suurempi kuin rajoitettu maksimi (3.56), niin (3.54) on ratkaisu.

3.4.5 Esimerkki 4

Maksimoidaan funktiota (3.51) rajoitteena $x + y \leq 79$.

Lagrangen funktio:

$$L(x, y, \lambda) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14 + \lambda[79 - x - y].$$

Ensimmäisen asteen ehdot:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x} = 64 - 4x + 4y - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4x - 8y + 32 - \lambda = 0, \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda}\lambda = [79 - x - y]\lambda = 0, \quad \lambda \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Tässä voidaan tarkastella erikseen kahta tapausta: rajoittamatonta optimia $\lambda = 0$, jonka ratkaisu on (3.54), ja rajoitettua optimia $\lambda > 0$, jossa ehdot (3.57) saavat yhtälörajoitemuodon

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x} = 64 - 4x + 4y - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 4x - 8y + 32 - \lambda = 0, \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 79 - x - y = 0.
\end{aligned}$$

Tästä kolmen yhtälön yhtälöryhmästä saadaan $x = 49$, $y = 30$ ja $\lambda = -12 < 0$. Koska $\lambda < 0$ on ristiriidassa ehtojen (3.57) kanssa, niin tämä tapaus ei ole mahdollinen. Näin ollen rajoite $x+y \leq 79$ ei voi olla sitova ja (3.54) on ratkaisu.

3.5 Sovelluksia

3.5.1 Cobb-Douglas hyötyfunktio

Cobb-Douglas hyötyfunktiolla on käyttökelpoinen ominaisuus että hyödykkeiden meno-osuudet ovat samat kuin hyötyfunktion parametrit. Tämä voidaan osoittaa seuraavasti.

Olkoon Cobb-Douglas hyötyfunktio muotoa

$$u = \prod_{j=1}^{m} c_j^{\alpha_j} \text{ with } \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1 \tag{3.58}$$

missä c_j on hyödykkeen j kulutus ja α_j ovat parametreja. Funktiolle (3.58) pätee

$$\frac{\partial u}{\partial c_j} = \alpha_j \frac{u_j}{c_j}. \tag{3.59}$$

Ottaen hyödykkeen j hinnan p_j ja kulutusmenot E annettuina kotitalous maksimoi hyötyä (3.58) kulutuksen $(c_1, ..., c_m)$ avulla rajoitteena budgetti

$$E = \sum_{j=1}^{m} p_j c_j. \tag{3.60}$$

Tätä maksimointia vastaava Lagrangen funktio on

$$\mathcal{L} = \log u + \mu \left[E - \sum_{j=1}^{m} p_j c_j \right].$$

Maksimoimalla tämä Lagrangen funktio muuttujien c_j avulla johtaa ensimmäisen asteen ehtoihin

$$\frac{\partial L}{\partial c_j} = \frac{\partial u}{\partial c_j} - \mu p_j = \frac{\alpha_j}{c_j} - \mu p_j = 0 \ \ (j = 1, ..., m).$$

Ratkaisemalla tästä $p_j c_j = \alpha_j / \mu$ ja sijoittamalla budgettirajoitteeseen (3.60) saadaan

$$E = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = \frac{1}{\mu} \quad \text{ja} \quad p_j c_j = \alpha_j E. \tag{3.61}$$

Johtopäätös:

Tulos 1 *Jos kotitaloudella on Cobb-Douglas hyötyfuktio* (3.58)*, se jakaa jokaiselle hyödykkeelle j osuuden α_j menoistaan E.*

Lopuksi sijoittamalla (3.61) hyötyfunktioon (3.58) saadaan:

Tulos 2 *Jos kotitaloudella on Cobb-Douglas hyötyfuktio* (3.58)*, niin sen vastaava epäsuora hyötyfunktio voidaan kirjoitaa menojen E ja hintojen p_j funktiona seuraavasti:*

$$\log u = \log E - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \log \left[\frac{p_j}{\alpha_j} \right],$$

missä α_j on hyödykkeen j meno-osuus.

3.5.2 CES hyötyfunktio

CES hyötyfunktiolla on käyttökelpoinen ominaisuus että hyödykkeen kysynnän hinnan suhteen on hyötyfunktion parametri. Tällöin hyödykkeen monopolituottaja asettaa rajakustannusten päälle vakiovoittoasteen (mark up).

Olkoo CES hyötyfunktio muotoa

$$u = \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j c_j^{1-1/\theta} \right]^{\theta/(\theta-1)} \quad \text{with} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1, \tag{3.62}$$

missä c_j on hyödykeen j kulutus ja θ on vakiosubstituutiojousto kahden hyödykkeen välillä. Tällöin

$$\frac{\partial u}{\partial c_j} = \left[\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \log c_j^{1-1/\theta} \right]^{1/(\theta-1)} \alpha_j \log c_j^{-1/\theta} = \alpha_j \left[\frac{u}{c_j} \right]^{1/\theta}. \tag{3.63}$$

Ottaen hyödykkeen j hinnan p_j ja kulutusmenot E annettuina kotitalous maksimoi hyötyä (3.58) kulutuksen $(c_1, ..., c_m)$ avulla rajoitteena budgetti

$$E = \sum_{j=1}^{m} p_j c_j. \tag{3.64}$$

Tätä maksimointia vastaava Lagrangen funktio on

$$\mathcal{L} = u + \mu\left[E - \sum_{j=1}^{m} p_j c_j\right].$$

Maksimoimalla tämä Lagrangen funktio muuttujien c_j avulla johtaa ensimmäisen asteen ehtoihin

$$\frac{\partial L}{\partial c_j} = \frac{\partial u}{\partial c_j} - \mu p_j = \alpha_j \left[\frac{u}{c_j}\right]^{1/\theta} - \mu p_j = 0 \ \ (j = 1, ..., m),$$

jotka voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi myös

$$c_j = \left[\frac{\alpha_j}{\mu p_j}\right]^{\theta} u \ \ (j = 1, ..., m). \tag{3.65}$$

Sijoittamalla nämä budjettirajoitteeseen (3.64) ja ottamalla huomioon (3.62) saadaan

$$E = \frac{u}{\mu^\theta} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j^\theta p_j^{1-\theta} \quad \text{ja} \quad \frac{u}{\mu^\theta} = \frac{E}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^\theta p_j^{1-\theta}}. \tag{3.66}$$

Sijoittamalla tämä (3.65):een saadaan kysyntäfunktiot

$$c_k = \frac{\alpha_k^\theta p_k^{-\theta} E}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^\theta p_j^{1-\theta}} \ \ (j = 1, ..., m). \tag{3.67}$$

Jos hyödykkeiden lukumäärä m on suuri ja mikään parametreista α_j ei ole hyvin suuri, niin termi $\alpha_k^\theta p_k^{-\theta}$ on hyvin pieni suhteessa termiin $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^\theta p_j^{1-\theta}$, ja hyödykkeen k kysynnän c_k hintajoustoksi tulee

$$\frac{p_k}{c_k}\frac{\partial c_k}{\partial p_k} = p_k \frac{\partial[\log c_k]}{\partial p_k} = p_k\left[-\frac{\theta}{p_k} + \frac{(1-\theta)\alpha_k^\theta p_k^{-\theta}}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^\theta p_j^{1-\theta}}\right] = -\theta + \underbrace{\frac{(1-\theta)\alpha_k^\theta p_k^{1-\theta}}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^\theta p_j^{1-\theta}}}_{\approx 0} \approx -\theta.$$

Johtopäätös:

Tulos 3 *Jos kotitaloudella on CES hyötyfuktio* (3.62) *hyödykkeitä on olemassa suuri määrä m, niin hyödykkeen k hintajousto on parametri $-\theta$.*

Sijoittamalla (3.67) hyötyfunktioon (3.62) saadaan

$$u = \frac{E}{\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^\theta p_j^{1-\theta}} \left[\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^\theta p_k^{1-\theta}\right]^{\theta/(\theta-1)} = E\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_j^\theta p_j^{1-\theta}\right]^{1/(\theta-1)}.$$

Johtopäätös:

Tulos 4 *Jos kotitaloudella on CES hyötyfunktio* (3.62) *ja hyödkkeitä on olemassa suuri määrä m, niin sen vastaava epäsuora hyötyfunktio voidaan kirjoitaa menojen E ja hintojen p_j funktiona seuraavasti:*

$$u = E\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_j^\theta p_j^{1-\theta}\right]^{1/(\theta-1)}.$$

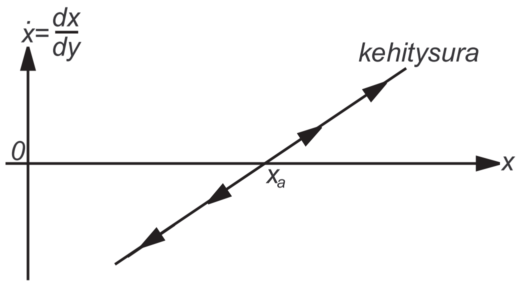
4 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöt

4.1 Yleistä

Jos taloudelliseen tai muuhun malliin sisältyy derivaattoja ajan (tai jonkun muun etenevän muuttujan suhteen), kysymyksessä on *differentiaaliyhtälö*. Differentiaaliyhtälön kertaluku on yhtä kuin korkeimman aikaderivaatan aste yhtälössä. Tässä tarkastellaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, joka on muotoa

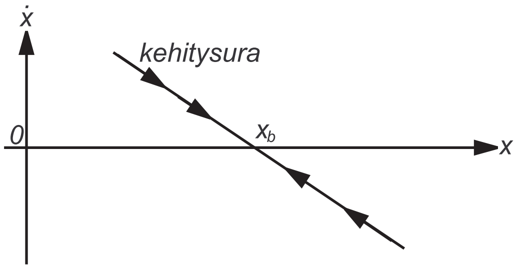
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \tag{4.1}$$

missä x on tilamuuttuja ja t aika. Piste päällä tarkoittaa derivaattaa ajan suhteen. Yksinkertaisin tapa tarkastella differentiaaliyhtälöä (4.1) on piirtää *vaihediagramma (phase diagram)*, jossa pystyakselilla on muuttujan aikaderivaatta ja vaaka-akselilla muuttuja itse.



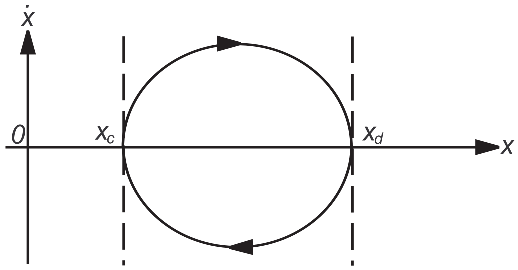
Kuva 4.1.

Kuvan 4.1 systeemillä on tasapaino x_a, joka on epästabiili (epävakaa): pienikin poikkeama x_a:sta suistaa systeemin pysyvästi tasapainosta x_a.



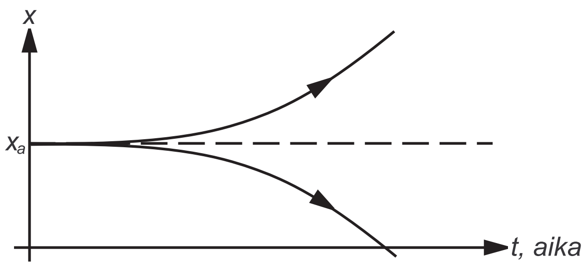
Kuva 4.2.

Kuvan 4.2 systeemillä on tasapaino joka on stabiili (vakaa): x_b:n ulkopuolella systeemi hakeutuu tasapainoonsa x_b.

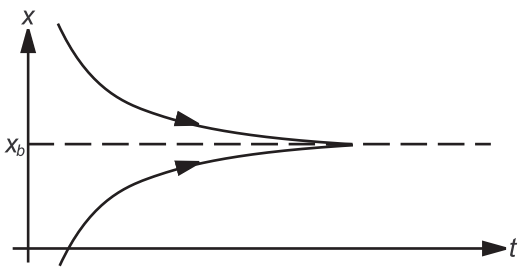


Kuva 4.3.

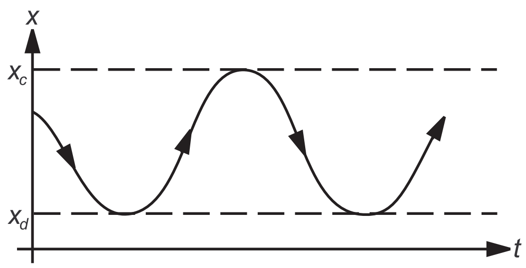
Kuvan 4.3 systeemillä on olemassa sykli: se heilahtelee loputtomasti välillä x_c ja x_d. Huom! x_c ja x_d eivät ole tasapainopisteitä koska kehitys ei pysähdy niihin. Toinen tapa tarkastella kehitystä on piirtää aikaura, jossa muuttuja itse on pystyakselilla ja aika vaaka-akselilla:



Kuva 4.4: Epästabiili tasapaino x_a.



Kuva 4.5: Stabiili tasapaino x_b.



Kuva 4.6: Sykli välillä x_c ja x_d

4.2 1. kertaluvun yhtälöt, joissa muuttujat voidaan erottaa.

Oletetaan, että muuttujia on kaksi: x ja y. Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Muuttujista toinen voi olla esim. aika. Tämän differentiaaliyhtlön kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y = \int f(x)dx + C,$$

missä C on mielivaltainen vakio ja $\int f(x)dx$ funktion f integraalifunktio.

Esim. 1. $y' = \frac{dy}{dx} = x + 1$. Integroimalla molemmin puolin saadaan

$$y = \int (x+1)dx + C = \frac{1}{2}x^2 + x + C.$$

Jos meillä on *alkuarvo* $y(0) = 0$, niin

$$y(0) = 0 + 0 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^2 + x.$$

4.3 Separoituvat 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Edellä käsiteltyä differentiaaliyhtälötyyppiä voidaan pitää erikoistapauksena ns. *separoituvasta differentiaaliyhtälöstä*, joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$g(y)y' = f(x), \qquad \text{missä } y' = \tfrac{dy}{dx}.$$

Tällainen yhtälö voidaan ratkaista seuraavasti: käsitellään symboleja dx ja dy ikäänkuin ne olisivat lukuja eli

$$g(y)y' = f(x) \quad \Rightarrow \quad g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad g(y)dy = f(x)dx.$$

Nyt integroidaan molemmin puolin

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C, \quad \text{missä } C \text{ vakio}.$$

Ideana on siis muuttujien erottaminen eri puolille, jolloin termit dy, dx voidaan eliminoida integroimalla.
Esim. 2. $\frac{dy}{dx} = xy$. Erottamalla muuttujat saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{y} = xdx \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int xdx + C_1, \qquad \text{missä } C_1 \text{ vakio} \\
&\Rightarrow \quad log|y| = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \\
&\Rightarrow \quad |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1} = e^{C_1} e^{\frac{1}{2}x^2} = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \qquad \text{missä } C = e^{C_1} \\
&\Rightarrow \quad y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}.
\end{aligned}$$

Nyt tulokseen ei tule eteen etumerkkiä $\pm$, koska C on mielivaltainen vakio, joka voi olla positiivinen tai negatiivinen.

Esim. 3. Määrätään kaikki funktiot $y(x)$, joiden jousto on vakio. Funktio $y(x)$ voi olla esim. kysyntäfunktio, jossa y on kysytty määrä ja x hinta, jolloin ratkaisuna saadaan vakiojoustoinen kysyntäfunktio. Muodostetaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{y'(x)}{y(x)}x = k = \text{vakio}. \tag{4.2}$$

Yhtälön vasen puoli on y:n pistejousto x:n suhteen, koska

$$\frac{y'}{y}x = \frac{\frac{dy}{dx}}{y}x = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{y\text{:n suht. muutos}}{x\text{:n suht. muutos}}.$$

Erottamalla yhtälöstä (4.2) muuttujat saadaan

$$\frac{dy}{y} = k\frac{dx}{x}.$$

Integroidaan molemmin puolin:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\frac{dx}{x} + C_1 = k\int \frac{dx}{x} + C_1 \quad \Rightarrow \quad \log|y| = k\log|x| + C_1.$$

Jos x ja y ovat positiivisia, niin

$$\begin{aligned}
\log y \quad &= \quad k\log x + C_1 \\
&\Rightarrow \quad y = e^{k\log x + C_1} = e^{C_1}e^{k\log x} = Ce^{k\log x} = Ce^{\log x^k} = Cx^k, \\
&\quad\;\;\;\, \text{missä } C = e^{C_1}.
\end{aligned}$$

Siis vakiojoustoinen funktio on potenssifunktio, jonka potenssina on jousto.

4.4 Sovellus: Solowin kasvumalli

Ongelma: Mikä on kansantalouden pitkän aikavälin pääoma/työpanos -suhde, jos työpanos L kasvaa vakionopeudella $n = \frac{\dot{L}}{L}$?

Oletukset:

(a) Taloudessa yksi hyödyke jota voidaan sekä kuluttaa että investoida.

(b) Väestö säästää vakio-osuuden s tuloistaan Y:

$$S = sY, \qquad 0 < s < 1. \tag{4.3}$$

(c) Tasapainossa säästäminen S on yhtä kuin investointi I:

$$S = I. \quad \text{Hyödykemarkkinoiden tasapaino} \tag{4.4}$$

(d) On olemassa neoklassinen tuotantofunktio

$$Y = F(K, L), \quad F_L > 0, \; F_K > 0, \; F_{LL} < 0, \; F_{KL} > 0, \; F_{KK} < 0, \tag{4.5}$$

$$\text{missä} \quad F(0, L) = F(K, 0) = 0, \tag{4.6}$$

$$F \text{ on lineaarihomogeeninen (so. vakioskaalatuotot).}$$

(e) Pääoma kasautuu investointien avulla. Oletamme yksinkertaisuuden vuoksi, että poistoja ei ole vaan pääoma kestää iäti, jolloin

$$\dot{K} = I. \tag{4.7}$$

Oletuksesta (d) seuraa

$$\begin{aligned} y &= \frac{Y}{L} = \frac{1}{L} F(K, L) = F(\frac{K}{L}, 1) = F(k, 1) \equiv f(k), \\ f(0) &= F(0, 1) = 0, \quad f' = F_K(k, 1) > 0, \quad f'' = F_{KK}(k, 1) < 0, \end{aligned} \tag{4.8}$$

missä

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{\text{tuotos}}{\text{työpanos}}, \qquad k = \frac{K}{L} = \frac{\text{pääoma}}{\text{työpanos}}.$$

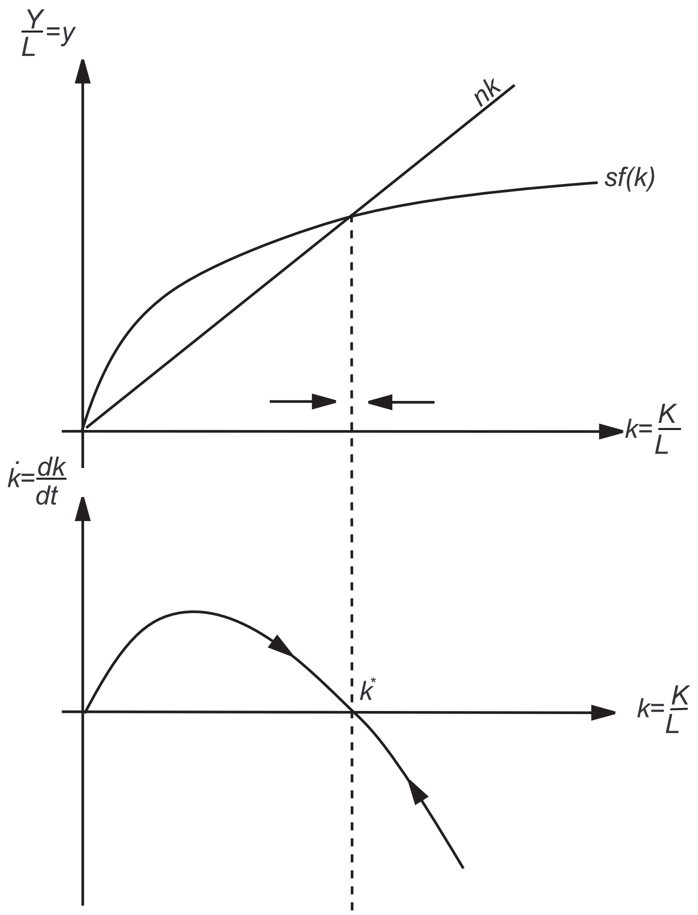
Edelleen oletuksista (d) ja (e) sekä yhtälöistä $n = \frac{\dot{L}}{L}$ ja (4.8) seuraa

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{dk}{dt} = \frac{d(\frac{K}{L})}{dt} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} =^{(4.7)} \frac{I}{L} - kn =^{(4.4)} \frac{S}{L} - kn \\ &=^{(4.3)} \frac{sY}{L} - nk =^{(4.8)} sf(k) - nk \end{aligned}$$

eli

$$\dot{k} = sf(k) - nk. \tag{4.9}$$

Pääoma/työpanos -suhdeluku $k = \frac{K}{L}$ noudattaa 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöä (4.9). Koska tämä yhtälö on epälineaarinen, emme ratkaise sitä analyyttisesti, vaan tyydymme graafiseen ratkaisuun. Piirretään seuraavat kuviot:



Kuva 4.7.

Kuvassa 4.7 piste k^* on stabiili tasapaino. Miten saadaan tasapaino k^*? Nyt k^*:n kohdalla $\frac{dk}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \quad sf(k^*) = nk^*$$

Tulos: Tasapaino k^* on tasolla, jossa säästäminen per capita $sy = sf(k)$ on yhtäkuin työvoiman kasvunopeus n kertaa pääomapanos per capita k

Tulkinta: Kansantalous hakeutuu kohden tasoa, jossa pääomapanos per työpanos on tasolla k^*.

Solowin periaate: Pääoma/työsuhde $k = \frac{K}{L}$ on pitkällä aikavälillä vakio.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{L}}{L} = n && (4.10) \\
\Rightarrow \quad & \frac{Y}{L} = \frac{1}{L}F(K,L) = F(\frac{K}{L},1), \\
& \text{missä } \tfrac{K}{L} \text{ on vakio} \\
\Rightarrow \quad & \frac{\dot{Y}}{Y}\text{on vakio} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{L}}{L} \\
\Rightarrow \quad & C = Y - \dot{K} =^{(4.10)} Y - nK,
\end{aligned}$$

C kasvaa siis samaa vauhtia kuin Y ja K. Täten havaitaan, että pitkällä aikavälillä työ, pääoma, tuotanto, investoinnit ja kulutus kasvavat kaikki samaa vauhtia n:

$$n = \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{I}}{I} = \frac{\dot{C}}{C}.$$

5 Lineaariset ja vakiokertoimiset differentiaaliyhtälöt

5.1 Yleistä

Tässä tarkastelemme differentiaaliyhtälöitä, jotka ovat muotoa

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = g(t), \tag{5.1}$$

missä $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ovat vakioita, n kokonaisluku sekä

(n) n:nnen asteen derivaatta (ajan t suhteen)

$''$ 2. asteen derivaatta (ajan t suhteen)

$'$ 1. asteen derivaatta (ajan t suhteen)

$g(t)$ ajan t funktio

Yhtälö (5.1) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = g(t).$$

Yhtälöä (5.1) sanotaan *ei-homogeeniseksi* differentiaaliyhtälöksi. Sitä vastaava homogeeninen differentiaaliyhtälö saadaan, kun asetetaan $g(t) \equiv 0$:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{5.2}$$

5.2 Homogeenisen yhtälön ratkaiseminen

Koska homogeeninen yhtälö (5.2) on n:ttä astetta, sillä on n kpl ratkaisuja eli mahdollisia muuttujan y funktioita ajan t suhteen, jotka toteuttavat yhtälön (5.2). Merkitsemme näitä ratkaisuja $y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)$ ja ne saadaan sijoittamalla (5.2):een $y = e^{\lambda t}$, missä λ on vakio. Tällöin saamme

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + a_2 \lambda^{n-2} e^{\lambda t} + ... + a_{n-1} \lambda e^{\lambda t} + a_n e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t} [a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_{n-1} + a_n], \end{aligned}$$

josta saadaan polynomi

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \tag{5.3}$$

Polynomia (5.3) sanotaan myös homogeenisen yhtälön (5.2) *karakteristiseksi yhtälöksi.*

Siis n:nnen asteen differentiaaliyhtälöllä on karakteristisena yhtälönä n:nnen asteen polynomi, jonka juuret $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ovat differentiaaliyhtälön *karakteristiset juuret*. Ratkaisemalla (5.3):sta juuret $\lambda_1, ..., \lambda_n$ saadaan sijoitetun funktion $y = e^{\lambda t}$ avulla *homogeenisen yhtälön ratkaisut*:

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \quad y_3(t) = e^{\lambda_3 t} \quad , ..., \quad y_n(t) = e^{\lambda_n t}.$$

Muodostamalla näistä painotettu keskiarvo (painot voivat olla myös negatiivisia) saadaan *homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu*:

$$f(t; A_1, ..., A_n) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + ... + A_n e^{\lambda_n t}, \tag{5.4}$$

missä t on aika ja $A_1, A_2, ..., A_n$ ovat parametreja (vakioita).

Erikoistapaus. Vaikka useampi juurista olisi sama, kaikkien ratkaisujen on silti oltava toisistaan riippumattomia. Oletetaan esimerkiksi, että edellä s ensimmäistä ratkaisua olisivat samat:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_s, \qquad s \leq n.$$

Tällöin ainoastaan ensimmäistä juurta λ_1 vastaava ratkaisu voi olla muotoa $e^{\lambda_1 t}$. Sen sijaan juuria $\lambda_2, ..., \lambda_s$ vastaavat ratkaisut muodostetaan seuraavasti:

$$y_2(t) = te^{\lambda_1 t}, \quad y_3(t) = t^2 e^{\lambda_1 t}, \quad y_4(t) = t^3 e^{\lambda_1 t} \quad, ..., \quad y_s(t) = t^{s-1} e^{\lambda_1 t}.$$

Tällöin homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu tulee yhtälön (5.4) sijasta muotoon

$$\begin{aligned} f(t; A_1, ..., A_n) \quad = \quad & A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 t e^{\lambda_1 t} + A_3 t^2 e^{\lambda_1 t} + ... \\ & + A_s t^{s-1} e^{\lambda_1 t} + A_{s+1} e^{\lambda_{s+1} t} + ... + A_n e^{\lambda_n t}. \end{aligned}$$

5.3 Ei-homogeenisen yhtälön ratkaiseminen

Ei-homogeenisen yhtälön (5.1) yleinen ratkaisu on

$$y(t) = \overline{y(t)} + \underbrace{f(t; A_1, ..., A_n)}_{(5.4)} = \overline{y(t)} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + ... + A_n e^{\lambda_n t}, \tag{5.5}$$

missä $\overline{y(t)}$ on yhtälön (5.1) *yksityis- eli erityisratkaisu* ja $f(\cdot)$ on vastaavan homogeenisen yhtälön (5.2) ratkaisu. Erityisratkaisu $\overline{y(t)}$ täytyy etsiä kokeilemalla. Seuraavat ohjeet yleensä riittävät ratkaisun löytämisessä.

Tapaus 1. $g(t) \equiv g$ =vakio. Tällöin kokeile sijoittamalla 5.1:een $y(t) = \mu$ =vakio, jolloin saadaan $y'(t) = 0$, $y''(t) = 0$ jne. sekä

$$a_n \mu = g, \qquad \overline{y(t)} = \mu = \frac{g}{a_n}.$$

Tällöin yleiseksi ratkaisuksi tulee

$$y(t) = \overline{y(t)} + f(t; A_1, ..., A_n) = \frac{g}{a_n} + f(t; A_1, ..., A_n).$$

Tapaus 2. $g(t)$ on eksponenttifunktio muotoa $g(t) = Be^{ht}$, missä B ja h ovat vakioita. Tämä muoto on varsin tavallinen monissa kasvumalleissa. Tällöin kokei-le sijoittamalla (5.1):een $y(t) = Ce^{ht}$, missä h on sama vakio kuin edellä $g(t)$:n potenssissa, ja C on vakio. Tällöin yksityisratkaisu ratkeaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} a_0h^nCe^{ht} + a_1h^{n-1}Ce^{ht} + a_2h^{n-2}Ce^{ht} + ...a_{n-1}hCe^{ht} + a_nCe^{ht} = Be^{ht} \\ \Rightarrow \quad C = B[a_0h^n + a_1h^{n-1} + a_2h^{n-2} + ...a_{n-1}h + a_n]^{-1} \\ \Rightarrow \quad \overline{y(t)} = Ce^{ht} = B[a_0h^n + a_1h^{n-1} + a_2h^{n-2} + ...a_{n-1}h + a_n]^{-1}e^{ht}. \end{aligned}$$

Yleiseksi ratkaisuksi tulee

$$\begin{aligned} y(t) &= \overline{y(t)} + f(t; A_1, ..., A_n) \\ &= B[a_0h^n + a_1h^{n-1} + a_2h^{n-2} + ... + a_{n-1}h + a_n]^{-1}e^{ht} + f(t; A_1, ..., A_n). \end{aligned}$$

Tapaus 3. $g(t)$ on m:nnen asteen polynomi eli $g(t) = c_0 + c_1t + ... + c_mt^m$. Tällöin kokeile (5.1):een samanasteista polynomia $y(t) = \alpha_0 + \alpha_1t + ... + \alpha_mt^m$. Kun tätä polynomia derivoidaan, se pysyy edelleen korkeintaan m:nnen asteen polynomina. Kertoimet α_0, α_1,...,α_m ratkaistaan asettamalla sijoittamisen jälkeen termien t^0 =vakio, t^2, t^3,..., t^m kertoimet yhtäsuuriksi molemmilta puolin yhtälöä. Sijoittamalla saadut α_0, α_1,...,α_m takaisin polynomiin $y(t) = \alpha_0 + \alpha_1t + ... + \alpha_mt^m$ saadaan erityisratkaisu ja yleinen ratkaisu.

Tapaus 4. $g(t)$ on sini/kosini tyyppiä:

$$\begin{aligned} g(t) \quad &= \quad \beta\cos(wt) + \beta_2\sin(wt), \\ &\quad\quad \text{missä } w,\ \beta_1 \text{ ja } \beta_2 \text{ vakioita.} \end{aligned}$$

Tämä muoto on varsin tavallinen monissa suhdannemalleissa. Kokeile 5.1:een seuraavankaltaista sini/kosini -kehitelmää:

$$\begin{aligned} y(t) \quad &= \quad b_1\cos(wt) + b_2\sin(wt), \\ &\quad\quad \text{missä } w \text{ sama vakio kuin edellä, } b_1 \text{ ja } b_2 \text{ vakioita.} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Kun kehitelmää (5.6) derivoidaan, pysyy se edelleen termien $\sin(wt)$ ja $\cos(wt)$ summana. Vakiot b_1 ja b_2 ratkaistaan asettamalla sjoittamisen jälkeen termien $\sin(wt)$ ja $\cos(wt)$ kertoimet yhtäsuuriksi molemmilta puolen yhtälöä. Sijoittamalla saadut b_1 ja b_2 takaisisn kehitelmään 5.6 saadaan erityisratkaisu ja yleinen ratkaisu.

5.4 Yhteenveto ei-homogeenisen yhtälön ratkaisualgoritmista

Lineaarisen ja vakiokertoimisen diff. yhtälön (5.1) ratkaiseminen voidaan tiivistää seuraavaksi menettelyksi.

Vaihe I: Etsi ei-homogeenisen yhtälön

$$a_0y^{(n)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = g(t)$$

yksityis- eli erityisratkaisu $\overline{y(t)}$ kokeilemalla (tapaukset $1 - 4$ yllä).

Vaihe II: Muodosta vastaava homogeeninen yhtälö

$$a_0 y^{(n)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Sijoittamalla tähän $y = e^{\lambda t}$ ratkaise karakteristinen yhtälö

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

ja tämän juuret $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Vaihe III: Muodosta yleinen ratkaisu

$$y(t) = \overline{y(t)} + f(t; A_1, ..., A_n) = \overline{y(t)} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + ... + A_n e^{\lambda_n t}$$

5.5 Stabiilisuus

Tarkastellaan ei-homogeenisen yhtälön yleistä ratkaisua:

$$y(t) = \underbrace{\overline{y(t)}}_{\text{erityisratkaisu}} + \underbrace{A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + ... + A_n e^{\lambda_n t}}_{\text{homogeenisen yhtälön ratkaisu}}. \tag{5.7}$$

Tästä havaitaan, että erityisratkaisua $\overline{y(t)}$ voidaan pitää systeemin (5.7) tasapainoisena kehitysurana, jonka ympärillä systeemi (5.7) kehittyy. Homogeenisen yhtälön ratkaisu taas osoittaa, onko systeemi stabiili vai ei. Systeemi (5.7) on globaalisti *stabiili*, $y(t) \to \overline{y(t)}$, jos homog. yhtälön ratkaisu lähenee nollaa eli jos

$$y(t) - \overline{y(t)} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + ... + A_n e^{\lambda_n t} \to 0, \quad \text{kun } t \to \infty.$$

Täten systeemi (5.7) on stabiili, jos kaikkien karakterististen juurien $\lambda_1, ..., \lambda_n$ reaaliosat ovat negatiiviset:

$$\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0, \quad \mathrm{Re}(\lambda_2) < 0, \quad ... \quad , \mathrm{Re}(\lambda_n) < 0.$$

Siis jos jokin juurista on kompleksiluku muotoa $x + iz$, niin riittää, kun reaaliosa x on negatiivinen. Stabiili systeemi hakeutuu aina tasapainoon, oli tilamuuttujan y alkuarvo mikä tahansa. Jos jonkin juuri λ_j reaaliosaltaan negatiivinen (positiivinen), $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ ($\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0$), niin tätä sanotaan *stabiiliksi (epästabiiliksi) juureksi.* Systeemi (5.7) ei voi olla globaalisti stabiili, jos sillä on yksikin epästabiili juuri. Jos systeemillä on sekä stabiileja että epästabiileja juuria, se voi saavuttaa tasapainoisen kehitysuransa joillakin alkuarvoilla ja pyrkiä poispäin tältä uralta muilla alkuarvoilla.

5.6 Esimerkkejä

Ratkaise 1. kertaluvun differentiaaliyhtälö $y' - y = t$.

Käydään ratkaisu läpi vaiheittain:

Vaihe *I*: Haetaan täydellisen yhtälön yksityisratkaisua. Koska oikea puoli on 1. asteen polynomi, kokeillaan 1. asteen polynomia $y = at + b$. Tällöin yritetään määrätä luvut a ja b siten, että funktio $y = at + b$ toteuttaa yhtälön $y' - y = t$:

$$\begin{aligned} y = at + b \quad \Rightarrow \quad y' = a \quad &\Rightarrow \quad t = y' - y = a - at - b \\ &\Rightarrow \quad (1 + a)t + b - a = 0. \end{aligned}$$

Viimeisin yhtälö toteutuu, kun t:n kerroin $1+a$ on nolla ja vakiotermi $b-a$ on nolla eli $a=-1$ ja $b=a=-1$. Tästä saadaan yksityisratkaisuksi

Vaihe II: Etsitään homogeenisen yhtälön $y'-y=0$ ratkaisu sijoittamalla $y=e^{\lambda t}$:

$$0=y'-y=\lambda e^{\lambda t}-e^{\lambda t}=(\lambda-1)e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \lambda=1 \quad \Rightarrow \quad y=e^t.$$

Täten saamme homogeenisen yhtälön ratkaisun $f(t;A)=Ae^t$, missä A on vakio.

Vaihe III: Ei-homog. yhtälön $y'-y=t$ ratkaisu saadaan summaamalla yksityisratkaisu $\bar{y}=-t-1$ ja homog. yhtälön ratkaisu Ae^t:

$$y(t)=\overline{y(t)}+f(t;A)=-t-1+Ae^t. \tag{5.8}$$

Varmistus:

$$y(t)=-t-1+Ae^t \quad \Rightarrow \quad y'=-1+Ae^t \quad \Rightarrow \quad y'-y=t.$$

Ratkaisu (5.8) kertoo systeemin $y'-y=t$ kehitysuran, jossa yksityisratkaisu $y=-t-1$ kuvaa tasapainoista kehitysuraa, ja homog. yhtälön ratkaisu $y=Ae^t$ systeemin kehitystä tämän tasapainoisen uran ympärillä. Koska $\lambda=1>0$, systeemillä on epästabiili juuri. Näin ollen se kehittyy tasapainoisesta urasta $y=-t-1$ poispäin.

Parametri A kuvaa sitä, että ratkaisuna on parvi käyriä. Jos tiedetään muuttujan y alkuarvo jonakin hetkenä, niin tästä parvesta voidaan valita yksittäinen käyrä. Esim. jos tiedetään, että y:n arvo hetkellä $t=0$ on $y(0)=1$, niin saamme $y(0)=-1+A=1$ ja $A=2$. Tällöin tätä alkuarvoa $y(0)=1$ vastaava yleinen ratkaisu on $y(t)=-t-1+2e^t$.

Ratkaise 2. kertaluvun differentiaaliyhtälö $y''+y'-2y=-10$ *alkuarvoilla* $y(0)=12$ *ja* $y'(0)=-2$.

Koska oikea puoli on vakio, kokeillaan $y=\mu$ =vakio, josta $y'=y''=0$, $-2\mu=-10$ ja erityisratkaisu $\bar{y}=\mu=5$. Tarkastellaan homogeenistä yhtälöä $y'+y'-2y=0$. Sijoitetaan $y=e^{\lambda t}$, josta $y'=\lambda e^{\lambda t}$ ja $y''=\lambda^2 e^{\lambda t}$. Sijoittamalla nämä takaisin homog. yhtälöön saadaan karakteristinen yhtälö $\lambda^2+\lambda-2=0$. Tämän juuret ovat $\lambda=1$ ja $\lambda=-2$, josta saamme homog. yhtälön ratkaisuksi

$$y(t)=A_1e^t+A_2e^{-2t}.$$

Summaamalla erityisratkaisu $\bar{y}=5$ ja homog. yhtälön ratkaisu saamme yleisen ratkaisun koko yhtälölle $y''+y'-2y=-10$:

$$y(t)=5+A_1e^t+A_2e^{-2t}.$$

Valitaan vakiot A_1 ja A_2 alkuarvojen $y(0)=12$ ja $y'(0)=-2$ avulla. Saadaan

$$y'(t)=A_1e^t-2A_2e^{-2t}, \quad y(0)=5+A_1+A_2=12, \quad y'(0)=A_1-2A_2=-2,$$

josta saadaan edelleen yhtälöryhmä $A_1+A_2=7$ ja $A_1-2A_2=-2$. Tästä ryhmästä ratkaistaan $A_1=4$ ja $A_2=3$. Näin ollen yleinen ratkaisu annetuilla alkuarvoilla on

$$y(t)=5+4e^t+3e^{-2t}.$$

5.7 Sovellus I: Walras'in 'näkymätön käsi'

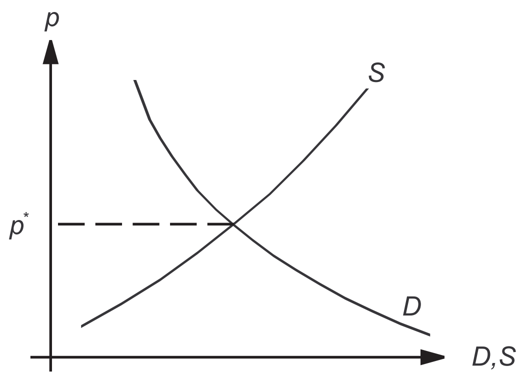
Tarkastellaan hinnan p sopetumista hyödykemarkkinoilla. Olkoon hyödykkeen kysyntäfunktio

$$D(t) = -ap(t) + b, \qquad a > 0,$$

ja tarjontafunktio

$$S(t) = Ap(t) + B, \qquad A > 0,$$

missä a, b, A ja B vakioita ja t on aika.



Kuva 5.1.

Ongelmana on, miten hinta p löytää tasapainon p^*. Walras'in ratkaisu ongelmaan oli seuraava: hinnan p muutos aikayksikössä $p' = \frac{dp}{dt}$ on suoraan verrannollinen markkinoiden ylikysyntään $D - S$ eli

$$p'(t) = k[D(t) - S(t)], \qquad \text{missä } k \text{ positiivinen vakio.} \tag{5.9}$$

Tutkitaan nyt, millä ehdoin tämä Walras'in oletus tekee markkinat stabiileiksi. Sijoittamalla kysyntä- ja tarjontafunktiot sopetumisyhtälöön (5.9) saadaan

$$p'(t) = k[(-a - A)p(t) + b - B].$$

Tästä saadaan lineaarinen differentiaaliyhtälö, joka kuvaa hinnan p muutosta ajassa t:

$$p'(t) + (A + a)kp(t) = (b - B)k. \tag{5.10}$$

Ratkaistaan nyt yhtälö (5.10). Koska sen oikea puoli on vakio, niin kokeillaan sijoittamista $p = \bar{p}$ =vakio. Saadaan erityisratkaisu

$$\bar{p} = \frac{b - B}{a + A}. \tag{5.11}$$

Etsitään vielä homogeeniselle yhtälölle

$$p'(t) + (A + a)kp(t) = 0$$

yleinen ratkaisu sijoittamalla $p = e^{\lambda t}$. Saadaan karakteristinen yhtälö

$$\lambda = -(a+A)k$$

ja yleinen ratkaisu

$$f(t;C) = Ce^{-(a+A)kt}, \qquad \text{missä } C \text{ vakio.}$$

Laskemalla yhteen erityisratkaisu ja tämä saadaan yhtälön (5.10) ratkaisu:

$$p(t) = \frac{b-B}{a+A} + Ce^{-(a+A)kt}. \tag{5.12}$$

Jos merkitsemme hinnan p arvoa alkuhetkellä $t = 0$ symbolilla $p(0) = p_0$, niin saamme (5.12):n perusteella

$$p_0 = p(0) = \frac{b-B}{a+A} + C \quad \text{ja} \quad C = p_0 - \frac{b-B}{a+A} = p_0 - \bar{p}.$$

Sijoittamalla tämä takaisin yleiseen ratkaisuun (5.12) saadaan

$$p = (p_0 - \bar{p})e^{-(a+A)kt} + \bar{p}.$$

Havaitaan, että markkinat ovat stabiilit: $p \to \bar{p}$, kun $t \to \infty$. Edelleen havaitaan, että erityisratkaisu on markkinoiden tasapainohinta, $\bar{p} = p^*$.

5.8 Sovellus II: Walras'n näkymätön käsi ja Giffenin hyödykkeet

Edelläolevassa sovelluksessa markkinasysteemi oli stabiili, koska kysyntäkäyrä oli laskeva ja tarjontakäyrä nouseva.

Oletetaan nyt, että hyödyke on Giffenin hyödyke, jonka kysyntäkäyrä on nouseva.

$$\begin{aligned} D(t) &= -ap(t) + b \qquad && \underbrace{a < 0}_{\text{Giffen-ominaisuus}} \\ S(t) &= Ap(t) + B && A > 0 \end{aligned}$$

Hinnan kehittyminen määräytyy saman yhtälön perustella kuin aikaisemmassa sovelluksessa:

$$p(t) = (p_0 - \bar{p})^{-(a+A)t} + \bar{p}$$

Tästä nähdään, että

(a) markkinat ovat stabiilit, jos

$$a + A > 0$$

(b) markkinat ovat epästabiilit jos

$$a + A < 0$$

Siis markkinat epästabiilit

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad a + A < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a < -A. \end{aligned}$$

6 Lineaariset ja vakiokertoimiset differenssiyhtälöt

6.1 Yleistä

Tarkastellaan ajan funktiota y. Oletetaan, että aika t saa vain kokonaislukuarvoja. Nyt y:n muuttumista ei voida enää kuvata derivaatan avulla, kuten differentiaaliyhtälöissä. Tällöin $y_1, y_2, ..., y_t, ...$ ovat muuttujan y periodeja $1, 2, ..., t, ...$ vastaavat arvot. Rajoitumme tässä lineaarisiin ja vakiokertoimisiin differenssiyhtälöihin, jotka ovat muotoa

$$c_0 y_t + c_1 y_{t-1} + ... + c_n y_{t-n} = g(t), \qquad c_n \neq 0, \tag{6.1}$$

missä $c_0, c_1, ..., c_n$ ovat vakioita ja $g(t)$ on ajan funktio. Differenssiyhtälö (6.1) on n:ttä astetta: korkein viive, jonka kerroin on erisuuri kuin nolla, määrää yhtälön asteen. Sellaista differenssiyhtälöä, jonka oikea puoli on identtisesti nolla, sanotaan *homogeeniseksi differenssiyhtälöksi.* Yhtälöä (6.1) vastaava homogeeninen yhtälö on

$$c_0 y_t + c_1 y_{t-1} + ... + c_n y_{t-n} = 0. \tag{6.2}$$

6.2 Homogeenisen yhtälön ratkaiseminen

Homogeenisen yhtälöllä (6.2) on sen asteen n ilmoittama lukumäärä ratkaisuja, joita merkitään $y^1(t), y^2(t), ..., y^n(t)$. Nämä ratkaisut saadaan sijoittamalla (6.2):een

$$y_t = k^t, \qquad \text{missä } k \neq 0 \text{ on vakio.}$$

Tällöin saadaan homogeenista yhtälöä (6.2) vastaava *karakteristinen yhtälö*

$$c_0 k^n + c_1 k^{n-1} + ... + c_{n-1} k + c_n = 0. \tag{6.3}$$

Karakteristinen yhtälö (6.3) on n:nnen asteen polynomi, jolle voidaan ratkaista juuret $k_1, k_2, ..., k_n$. Näiden ja sijoituksen $y_t = k^t$ perusteella saadaan homogeenisen yhtälön (6.2) ratkaisut:

$$y^1(t) = k_1^t, \;\; y_t^2 = k_2^t, \;\; ... \;\; y^n(t) = k_n^t.$$

Näistä *homogeenisen yhtälön (6.2) yleinen ratkaisu* saadaan painotettuna kertoimena:

$$f(t; A_1, ..., A_n) = A_1 k_1^t + A_2 k_2^t + A_3 k_3^t + ... + A_n k_n^t, \tag{6.4}$$

missä $A_1, A_2, ..., A_n$ ovat vakioita.

Edellä esitettyyn pääsääntöön on olemassa yksi poikkeus. Jos karakteristisella yhtälöllä (6.3) on olemassa *moninkertainen juuri*, niin silloin tätä juurta vastaavat homogeenisen yhtälön ratkaisut on tehtävä riippumattomiksi kertomalla toinen juuri t:llä, kolmas t^2:lla, jne. Esimerkiksi jos juuret $k_2 = k_1$, niin silloin yleinen ratkaisu (6.4) muuntuu muotoon:

$$f(t; A_1, ..., A_n) = A_1 k_1^t + A_2 t k_1^t + A_3 k_3^t + ... + A_n k_n^t,$$

6.3 Ei-homogeenisen yhtälön ratkaiseminen

Ei-homogeenisen yhtälön (6.1) yleinen ratkaisu on muotoa

$$y_t = \overline{y(t)} + f(t; A_1, ..., A_n), \tag{6.5}$$

missä $\overline{y(t)}$ on yhtälön (6.1) mikä tahansa *yksityis- eli erityisratkaisu* ja f vastaavan homogeenisen yhtälön (6.2) yleinen ratkaisu (6.4). Erityisratkaisu $\overline{y(t)}$ täytyy löytää kokeilemalla. Seuraavat ohjeet yleensä riittävät ratkaisun löytämiseen:

Tapaus 1. $g(t) \equiv g$ =vakio. Kokeile sijoittamalla $y_t = a$ =vakio. Tällöin saadaan

$$c_0a + c_1a + c_2a + ... + c_na = g \quad \Rightarrow \quad \overline{y(t)} = a = \frac{g}{c_0 + c_1 + c_2 + ... + c_n}.$$

Jos tämä ei onnistu, niin kokeile sijoittamalla $y_t = at$, missä a on vakio.

Tapaus 2. $g(t) = Bh^t$, missä B ja h ovat vakioita. Kokeile sijoittamalla $y_t = Ch^t$, missä C on vakio ja h sama vakio kuin edellä. Tämän tarkoituksena on saada 'hankala termi' myös vasemmalle puolelle, jolloin se supistuu pois. Saadaan

$$\begin{aligned}
& c_0Ch^t + c_1Ch^{t-1} + ... + c_nCh^{t-n} = Bh^t \\
\Rightarrow \quad & c_0C + c_1Ch^{-1} + ... + c_nCd^{-n} = B \\
\Rightarrow \quad & C[c_0 + c_1h^{-1} + ... + c_nh^{-n}] = B \\
\Rightarrow \quad & C = \frac{B}{c_0 + c_1h^{-1} + ... + c_nh^{-n}}.
\end{aligned}$$

Edelleen käyttämällä hyväksi sijoitusta saadaan yksityisratkaisuksi

$$\overline{y(t)} = Ch^t = \frac{Bh^t}{c_0 + c_1h^{-1} + ... + c_nh^{-n}}.$$

Tapaus 3. $g(t)$ on m:nnen asteen polynomi ajan t suhteen:

$$g(t) = \alpha_0 + \alpha_1t + \alpha_2t^2 + ... + \alpha_mt^m, \qquad \text{missä } \alpha_0, ..., \alpha_m \text{ vakioita ja } \alpha_m \neq 0.$$

Kokeillaan samanasteista polynomia

$$y_t = \beta_0 + \beta_1t + \beta_2t^2 + ... + \beta_mt^m. \tag{6.6}$$

Sijoittamalla tämä (6.1):een voidaan parametrit $\beta_0, ..., \beta_m$ ratkaista asettamalla termien $t^1, ..., t^m$ kertoimet ja vakiotermit yhtäsuuriksi molemmilta puolin yhtälöä. Sijoittamalla nämä parametrit $\beta_0, ..., \beta_m$ takaisin (6.6):ään saadaan yksityisratkaisu.

Tapaus 4. $g(t)$ on sini/kosini- tyyppiä

$$g(t) = \beta_1\cos(wt) + \beta_2\sin(wt), \qquad \text{missä } w, \beta_1 \text{ ja } \beta_2 \text{ vakioita.} \tag{6.7}$$

Kokeile sijoittamalla

$$y_t = \alpha_1\cos(wt) + \alpha_2\sin(wt), \qquad \text{missä } \alpha_1 \text{ ja } \alpha_2 \text{ vakioita ja } w \text{ sama kuin (6.7):ssa.} \tag{6.8}$$

Sijoittamalla (6.8) (6.1):een saadaan ratkaistua α_1 ja α_2, jolloin (6.8) antaa yksityisratkaisun.

6.4 Yhteenveto ei-homogeenisen yhtälön ratkaisu-algoritmista

Lineaarisen ja vakiokertoimisen differenssiyhtälön (6.1) ratkaisu saadaan seuraavasti:

Vaihe I**:** Etsi ei-homogeenisen yhtälön

$$c_0 y_t + c_1 y_{t-1} + ... + c_n y_{t-n} = g(t)$$

yksityis- eli erityisratkaisu $\overline{y(t)}$ kokeilemalla (tapaukset $1-4$ yllä).

Vaihe II**:** Muodosta vastaava homogeeninen yhtälö

$$c_0 y_t + c_1 y_{t-1} + ... + c_n y_{t-n} = 0.$$

Sijoittamalla tähän $y_t = k^t$ ratkaise karakteristinen yhtälö

$$c_o k^n + c_1 k_{n-1} + ... + c_{n-1} k + c_n = 0$$

ja tämän juuret $k_1, ..., k_n$. Näiden avulla saadaan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu:

$$f(t; A_1, ..., A_n) = A_1 k_1^t + A_2 k_2^t + ... + A_n k_n^t.$$

Jos karakteristisella yhtälöllä on olemassa *moninkertainen juuri*, niin silloin tätä juurta vastaavat homogeenisen yhtälön ratkaisut on tehtävä riippumattomiksi kertomalla toinen juuri t:llä, kolmas t^2:lla, jne.

Vaihe III**:** Muodosta yleinen ratkaisu

$$y_t = \overline{y(t)} + f(t; A_1, ..., A_n) = \overline{y(t)} + A_1 k_1^t + A_2 k_2^t + ... + A_n k_n^t.$$

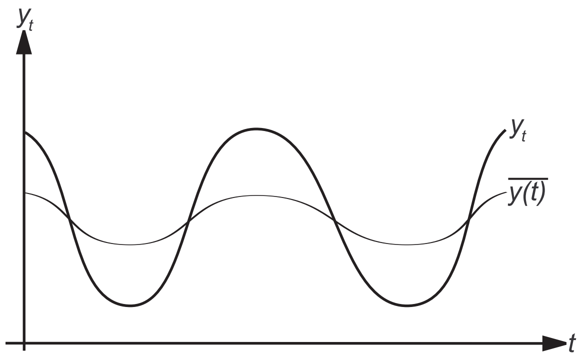
6.5 Suppeneminen

Differenssiyhtälöiden suppeneminen vastaa differentiaaliyhtälön stabiilisuutta. Yleisen ratkaisun

$$y_t = \overline{y(t)} + f(t; A_1, ..., A_n) = \overline{y(t)} + A_1 k_1^t + A_2 k_2^t + ... + A_n k_n^t$$

perusteella havaitaan, että erityisratkaisu $\overline{y(t)}$ on se tasapainomuuttuja, jonka ympärillä muuttuja y_t vaihtelee. Sitä juurta, jonka itseisarvo on suurin, sanotaan *dominoivaksi juureksi*. Differenssiyhtälö *suppenee*, jos dominoiva juuri on pienempi kuin yksi (ts. jos kaikki juuret ovat itseisarvoltaan pienempiä kuin yksi):

$$y_t - \overline{y(t)} = \underbrace{A_1 k_1^t + A_2 k_2^t + ... + A_n k_n^t}_{\to 0}, \qquad \text{jos } |k_i| < 1 \text{ kaikilla } i\text{:llä.}$$



Kuva 6.1.

Jos differenssiyhtälö suppenee, niin y_t:n aikaura lähenee koko ajan $\overline{y}(t)$:n aikauraa. Jos differenssiyhtälö ei suppene, niin y_t:n aikaura etääntyy yhä enemmän $\overline{y}(t)$:n aikaurasta. Kummassakin tapauksessa y_t voi heilahdella $\overline{y}(t)$:n molemmin puolin tai olla heilahtelematta (ts. pysyy $\overline{y}(t)$:n samalla puolella).

Esim. Ratkaise yhtälö $y_{t+1} - 5y_t = 1$ alkuarvolla $y_0 = \frac{7}{4}$. Koska oikea puoli vakio, sijoitetaan $y_t = y_{t+1} = a$, joilloin saadaan $a - 5a = 1$ ja erityisratkaisu $\overline{y(t)} = a = -\frac{1}{4}$. Ratkaistaan homogeeninen yhtälö $y_{t+1} - 5y_t = 0$ sijoittamalla $y_t = k^t$:

$$
\begin{aligned}
y_{t+1} = k^{t+1} \quad &\Rightarrow \quad k^{t+1} + 5k^t = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-5)k^t = 0 \\
&\Rightarrow \quad k = 5 \quad \Rightarrow \quad y_t = k^t = 5^t.
\end{aligned}
$$

Havaitaan, että malli ei suppene, koska juuri $k = 5 > 1$. Yleinen ratkaisu on nyt muotoa

$$y_t = -\frac{1}{4} + A5^t,$$

missä A on vakio. Valitaan $t = 0$ alkuarvon ratkaisemiseksi:

$$y_0 = -\frac{1}{4} + A = \frac{7}{4} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{8}{4} = 2.$$

Siis yleinen ratkaisu alkuarvolla tai ehdolla $y_0 = \frac{7}{4}$ on

$$y_t = -\frac{1}{4} + 2 \cdot 5^t.$$

Piirretään aikaura, jossa pystyakselilla on y_t ja vaaka-akselilla t (harjoitus).

6.6 Kompleksijuurista

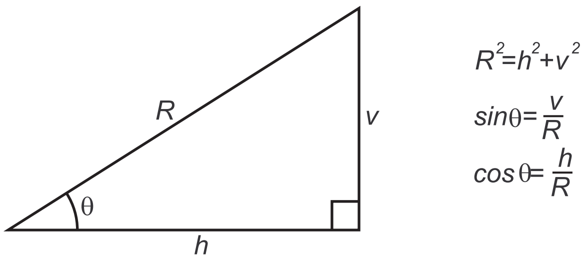
Jos juuret k_1 ja k_2 ovat kompleksilukuja, niitä voidaan merkitä seuraavasti:

$$k_1 = h + vi, \quad k_2 = h - vi, \quad h \text{ ja } v \text{ reaalilukuja.}$$

Nyt käytämme hyväksi deMoivren seuraavaa teoreemaa:

$$k_1^t = (h + vi)^t = R^t[\cos(\theta t) + i\sin(\theta t)], \tag{6.9}$$
$$k_2^t = (h - vi)^t = R^t[\cos(\theta t) - i\sin(\theta t)],$$

missä $R = \sqrt{h^2 + v^2}$ ja θ on kulma, joka toteuttaa ehdon $\cos\theta = \frac{h}{R}$. R ja θ voidaan nähdä seuraavasta kolmiosta:



Kuva 6.2.

Kaavojen (6.9) avulla voidaan päätellä seuraavaa. Sini- ja kosinifunktioiden arvot ovat aina välillä $[-1, 1]$. Täten juuret k_1 ja k_2 suppenevat silloin ja vain silloin kun $R < 1$.

6.7 Sovellus I: lukinseittiteoreema

Tunnetaan myös nimellä 'sikasykli', koska tämä malli selitti aikaisemmin aika hyvin maataloustuotteiden hintojen vaihteluja. Oletetaan, että markkinahinta selvittää markkinat saman periodin aikana, mutta että yrittäjät tekevät tuotantopäätöksensä edellisen periodin hinnan perusteella. Täten yrittäjillä on ns. lyhytnäköiset eli myooppiset odotukset: he olettavat, että nykyinen hinta on voimassa myös tulevaisuudessa.

Olkoon tarjontafunktio

$$S = \delta p_{t-1} - \gamma, \qquad \text{missä } \delta > 0 \text{ ja } \gamma \text{ vakioita,}$$

ja kysyntäfunktio

$$D = \alpha - \beta p_t, \qquad \text{missä } \alpha > 0 \text{ ja } \beta > 0 \text{ vakioita.}$$

Tasapainossa kysyntä vastaa tarjontaa:

$$\alpha - \beta p_t = D = S = \delta p_{t-1} - \gamma,$$

mistä saadaan 1. kertaluvun differenssiyhtälö:

$$\beta p_t + \delta p_{t-1} = \alpha + \gamma.$$

Koska (6.7):n oikea puoli on vakio, niin sijoitamme $p_t = a$ =vakio:

$$p_{t-1} = a, \qquad (\beta + \delta)a = \alpha + \gamma,$$

mistä saadaan erityisratkaisu:

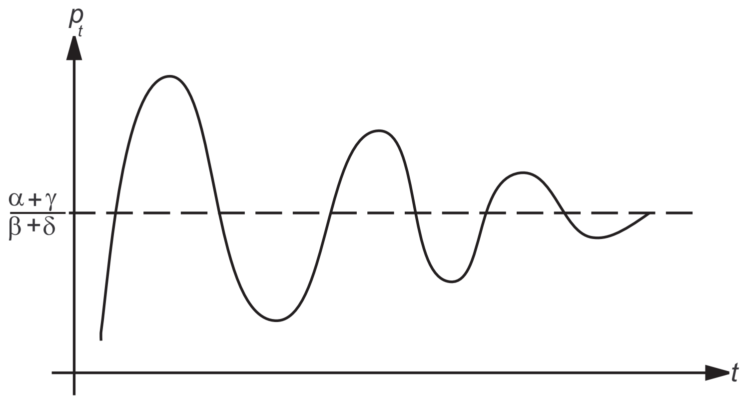
$$\overline{p(t)} = a = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}. \tag{6.10}$$

Yhtälöä (6.7) vastaava homogeeninen yhtälö $\beta p_t + \delta p_{t-1} = 0$ voidaan ratkaista sijoittamalla $p_t = k^t$:

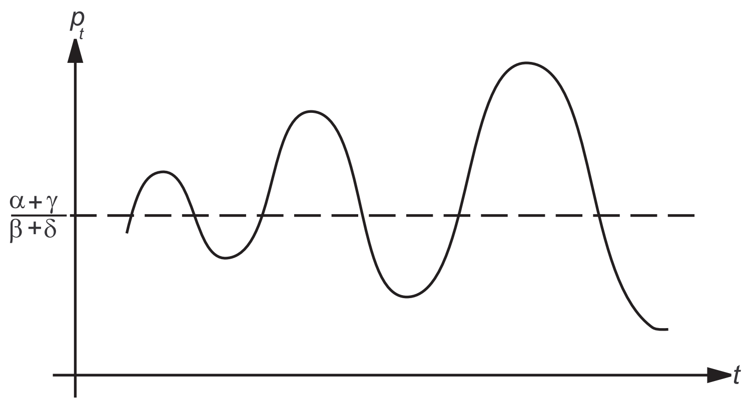
$$p_{t-1} = k^{t-1} \quad \Rightarrow \quad \beta k^t + \delta k^{t-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta k + \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{\delta}{\beta}.$$

Siis saimme juureksi $k = -\frac{\delta}{\beta}$ ja yleiseksi ratkaisuksi

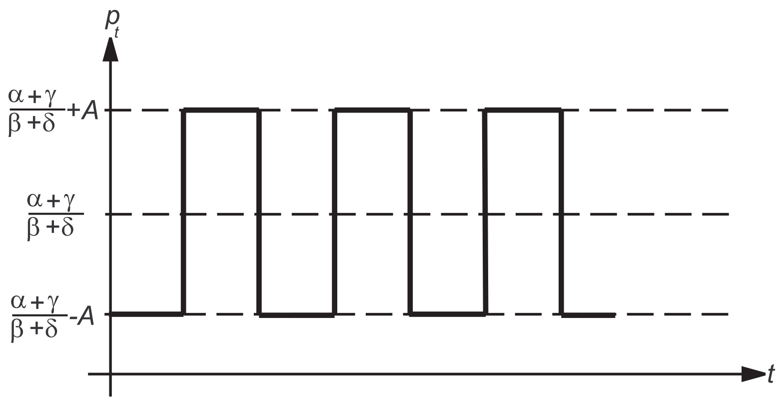
$$p_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} + A(-\frac{\delta}{\beta})^t. \tag{6.11}$$



Kuva 6.3: $\delta < \beta$, vaimeneva



Kuva 6.4: $\delta > \beta$, räjähtävä



Kuva 6.5: $\delta = \beta$, sykli

Koska juuri k on negatiivinen, niin muuttuja p_t heilahtelee erityisratkaisunsa (6.10) ympärillä. Edelleen muuttuja y_t suppenee, jos juuren itseisarvo

$$|k| = \frac{\delta}{\beta} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \delta < \beta.$$

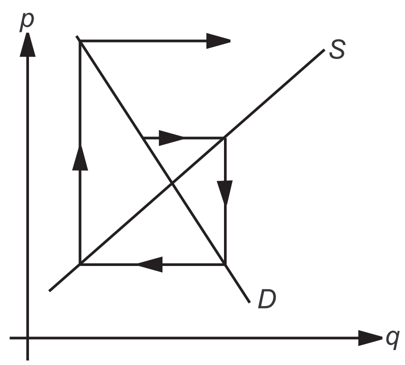
Siis markkinoiden vakaus voidaan päätellä kysyntä- ja tarjontafunktioiden kulmakertoimien δ ja β perusteella! Koska arvolla $t = 0$

$$p_0 = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} + A,$$

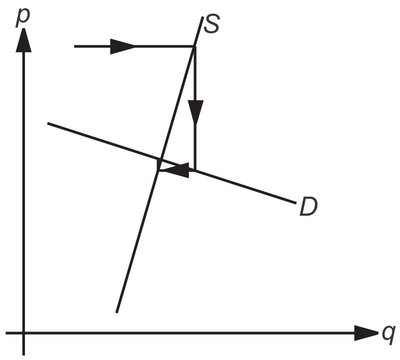
niin $A = p_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$. Sijoittamalla tämä yleiseen ratkaisuun (6.11) saamme

$$p_t = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} + (p_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta})(-\frac{\delta}{\beta})^t.$$

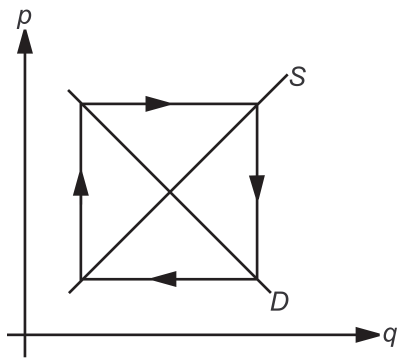
Tämän avulla voidaan hintakehitys p_t piirtää aikaurana, jos alkuarvo p_0 hetkellä $t = 0$ tunnetaan:



Kuva 6.6: $\delta > \beta$, voimistuva



Kuva 6.7: $\delta < \beta$, vaimeneva



Kuva 6.8: $\delta = \beta$, sykli

6.8 Sovellus II: Kerroin-kiihdytin malli

Tämä Kaleckin ja Samuelsonin luoma malli (*multiplicator-accelerator model*) oli yleinen suhdannemalli aina 1970-luvun alkupuolelle saakka. Nykyisin se on vanhentunut.

Oletetaan, että on olemassa vain yksi hyödyke, jota voidaan kuluttaa tai investoida. Joka periodilla t kokonaiskysyntä (=tulot) Y_t koostuu kulutuksesta C_t, investoinneista I_t ja julkisista menoista, jotka oletetaan pidettävän tavoitetasollaan G:

$$Y_t = C_t + I_t + G. \tag{6.12}$$

Kulutus on keynesiläinen funktio edellisen periodin tuloista:

$$C_t = \gamma Y_{t-1}, \qquad \text{missä } 0 < \gamma < 1 \text{ kulutusalttius.} \tag{6.13}$$

Kokonaiskysynnän Y_t kasvu saa aikaan tarpeen lisätä tuotantokapasiteettia, sillä jotkut yritykset törmäävät kapasiteettirajaansa. Koska investointien hallinnollinen viive oletetaan yhden periodin mittaiseksi, tulojen kasvu edellisellä periodilla $t-1$, $Y_{t-1}-Y_{t-2}$, lisää investointeja periodilla t:

$$I_t = \alpha[Y_{t-1}-Y_{t-2}], \qquad \text{missä } \alpha > 0 \text{ kiihdytinparametri.} \tag{6.14}$$

Huomautus. Kirjassa yhtälö (6.14) on muotoa $I_t = \alpha[C_{t-1}-C_{t-2}]$, joten tuloksetkin ovat erilaisia.

Sijoittamalla kulutusfunktio (6.13) ja investointifunktio (6.14) tasapainoehtoon (6.12) saadaan

$$Y_t = \gamma Y_{t-1} + \alpha[Y_{t_1} - Y_{t-2}] + G,$$

mistä ratkaistaan 2. kertaluvun differenssiyhtälö:

$$\alpha Y_{t-2} - (\gamma+\alpha)Y_{t-1} + Y_t = G. \tag{6.15}$$

Koska yhtälön (6.15) oikea puoli on vakio, sijoitetaan siihen $Y_t = a$ =vakio:

$$Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = a \quad \Rightarrow \quad (1-\gamma)a = G,$$

mistä saadaan yhtälön (6.15) erityisratkaisu:

$$\overline{Y(t)} = a = \frac{G}{1-\gamma}. \tag{6.16}$$

Yhtälöä (6.15) vastaava homogeeninen yhtälö $\alpha Y_{t-2} - (\gamma+\alpha)Y_{t-1} + Y_t = 0$ ratkaistaan sijoittamalla $Y_t = k^t$:

$$Y_t = k^t, \quad Y_{t-1} = k^{t-1}, \quad Y_{t-2} = k^{t-2} \quad \Rightarrow \quad \alpha k^{t-2} - (\gamma+\alpha)k^{t-1} + k^t = 0,$$

mistä saadaan karakteristinen yhtälö

$$k^2 - (\gamma+\alpha)k + \alpha = 0.$$

Karakteristisen yhtälön juuriksi saadaan

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}\Big[\gamma+\alpha+\sqrt{(\gamma+\alpha)^2-4\alpha}\Big], \\ k_2 &= \frac{1}{2}\Big[\gamma+\alpha-\sqrt{(\gamma+\alpha)^2-4\alpha}\Big]. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Nyt yhtälön (6.15) yleinen ratkaisu on muotoa:

$$Y_t = \frac{G}{1-\gamma} + A_1k_1^t + A_2k_2^t, \tag{6.18}$$

missä A_1 ja A_2 vakioita ja juuret k_1 ja k_2 on annettu (6.17):ssä.

Yleisessä ratkaisussa (6.18) termi $\frac{G}{1-\gamma}$ on julkisten menojen G kerroinvaikutus, koska γ on kulutusalttius ja $\frac{1}{1-\gamma}$ on Keynesin/Kahnin kerroin. Juurille (6.17) pitää paikkansa

$$k_1 + k_2 = \gamma + \alpha > 0, \tag{6.19}$$

$$k_1k_2 = \frac{1}{4}\Big\{(\gamma+\alpha)^2 - [(\gamma+\alpha)^2-4\alpha]\Big\} = \alpha > 0. \tag{6.20}$$

Oletetaan ensiksi, että $(\gamma+\alpha)^2 \geq 4\alpha$, jolloin juuret k_1 ja k_2 ovat reaalisia. Tuloksesta (6.20) seuraa, että juuret k_1 ja k_2 ovat saman merkkiset, koska niiden tulo on positiivinen. Tällöin tuloksen (6.19) nojalla voimme päätellä, että juuret k_1 ja k_2 ovat positiivisia

$$k_1 > 0, \qquad k_2 > 0, \tag{6.21}$$

mikä merkitsee sitä, että *tulotaso* Y_t *ei heilahtele* sopetuessaan. Edelleen (6.13):stä, (6.19):sta ja (6.20):sta saadaan

$$(1-k_1)(1-k_2) = 1-(k_1+k_2)+k_1k_2 =^{6.19,6.20} 1-(\gamma+\alpha)+\alpha = 1-\gamma \in (0,1)$$

Tällöin

$$0 < (1-k_1)(1-k_2) < 1. \tag{6.22}$$

Nyt kaavojen (6.17) sekä epäyhtälöiden (6.21) ja (6.22) perusteella on olemassa vain seuraavat kaksi mahdollisuutta:

(a) $0 < k_1 < 1$ ja $0 < k_2 < 1$, sekä

(b) $k_1 > k_2 > 1$.

Tapauksessa $0 < k_1 < 1$ ja $0 < k_2 < 1$ systeemi suppenee:

$$Y_t = \frac{G}{1-\gamma} + \underbrace{A_1k_1^t + A_2k_2^t}_{\to 0} \to \frac{G}{1-\gamma}, \quad \text{kun } t \to \infty.$$

Tapauksessa $k_1 > k_2 > 1$ saamme yhtälön (6.20) perusteella $\alpha = k_1k_2 > 1$, jolloin systeemi hajaantuu, jos $A_1 \neq 0$ tai $A_2 \neq 0$:

$$Y_t = \frac{G}{1-\gamma} + \underbrace{A_1k_1^t + A_2k_2^t}_{\to\pm\infty}, \quad \text{kun } t \to \infty.$$

Siis systeemi suppenee, kun $\alpha < 1$ ja hajautuu, kun $\alpha > 1$.

Oletetaan seuraavaksi $(\gamma+\alpha)^2 < 4\alpha$, jolloin juuret k_1 ja k_2 ovat kompleksisia. Tällöin voimme merkitä

$$k_1 = \frac{1}{2}\Big[\gamma+\alpha+\sqrt{(\gamma+\alpha)^2-4\alpha}\Big] = \frac{\gamma+\alpha}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{4\alpha-(\gamma+\alpha)^2} = h+vi,$$
$$k_2 = \frac{1}{2}\Big[\gamma+\alpha-\sqrt{(\gamma+\alpha)^2-4\alpha}\Big] = \frac{\gamma+\alpha}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{4\alpha-(\gamma+\alpha)^2} = h-vi,$$

missä

$$h = \frac{\gamma+\alpha}{2}, \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha-(\gamma+\alpha)^2} = \sqrt{\alpha-(\frac{\gamma+\alpha}{2})^2}, \quad R = \sqrt{h^2+v^2} = \sqrt{\alpha}.$$

Nyt jos t lähenee ääretöntä, niin saadaan

$$A_1k_1^t + A_2k_2^t \quad \begin{cases} \to 0, & \text{kun } R < 1 \text{ eli } \alpha < 1 \\ \to \pm\infty & \text{kun } R > 1 \text{ eli } \alpha > 1, \text{ ja } A_1 \neq 0 \text{ tai } A_2 \neq 0. \end{cases}$$

Lisäksi havaitsemme, että termi $A_1k_1^t + A_2k_2^t$ heilahtelee vakiovälillä, kun $R = 1$ eli $\alpha = 1$.

Tällöin ehdosta $(\gamma+\alpha)^2 < 4\alpha$ saamme $(1+\alpha)^2 < 4$ ja $\gamma \in (-\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1)$, ja koska $0 < \gamma < 1$, niin havaitsemme, että kulutusalttiuden on oltava välillä $(0, \sqrt{3}-1)$. Siis systeemi syppenee, jos $\alpha < 1$, hajautuu, jos $\alpha > 1$, ja sillä on puhdas sykli, jos $\alpha = 1$ ja $0 < \gamma < \sqrt{3} - 1 \approx 0.73$.

Yhdistämällä tapausten $(\gamma + \alpha)^2 \geq 4\alpha$ ja $(\gamma + \alpha)^2 < 4\alpha$ tulokset voimme tehdä seuraavan johtopäätöksen:

Tulos: Jos $\alpha < 1$, niin systeemi (6.15) suppenee ja tulotaso Y_t sopeutuu kohden julkisten menojen kerroinvaikutusta $\frac{G}{1-\gamma}$. Jos $\alpha > 1$, niin systeemi (6.15) hajautuu. Jos $\alpha = 1$ ja $0 < \gamma < 0.73$, niin systeemillä (6.15) on puhdas sykli ja tulotaso heilahtelee loputtomasti tasapainon $\frac{G}{1-\gamma}$ molemmin puolin.

7 Lineaariset differentiaali- ja differenssiyhtälöryhmät

7.1 Differentiaaliyhtälöryhmät

7.1.1 Muuntaminen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöiksi

Jotta korkeamman asteen differentiaaliyhtälöryhmä voitaisiin ratkaista, se muunnetaan ensiksi 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi, jossa on yhtä monta tilamuuttujaa kuin yhtälöä.

Esimerkki. Tarkastellaan 3. kertaluvun lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$a\frac{d^3x}{dt^3} + b\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + fx = 0, \tag{7.1}$$

jossa x on tilamuuttuja. Määritellään uudet tilamuuttujat y ja z seuraavasti:

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad z = \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{7.2}$$

jolloin myös

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d^3x}{dt^3}. \tag{7.3}$$

Yhtälöistä (7.1)-(7.3) saadaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmä:

$$\begin{cases} a\frac{dz}{dt} + bz + cy + x = 0 \\ \frac{dx}{dt} - y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - z = 0 \end{cases}$$

jossa x, y ja z ovat tilamuuttujia.

Seuraavaksi tarkastelemme 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisemista.

7.1.2 Perusongelma

Tarkastellaan 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmää

$$Ju + Mv = g, \tag{7.4}$$

missä

$$J = \begin{pmatrix} \jmath_{11} & \jmath_{12} & \cdots & \jmath_{1n} \\ \jmath_{\jmath 1} & \jmath_{22} & \cdots & \jmath_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \jmath_{n1} & \jmath_{n2} & \cdots & \jmath_{nn} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Differentiaaliyhtälöiden tapaan yritämme löytää ensiksi erityisratkaisun yhtälölle (7.4) ja sitten yleisen ratkaisun vastaavalle homogeemiselle yhtälölle

$$Ju + Mv = 0. \tag{7.5}$$

Laskemalla nämä yhteen saadaan yhtälön (7.4) yleinen ratkaisu.

7.1.3 Erityisratkaisu

Koska yhtälöryhmässä (7.4) oikea puoli on vakio, erityisratkaisun saamiseksi kokeillaan sijoitusta, jossa tilamuuttujat ovat vakioita: $x_i = \bar{x}_i$ kaikilla $i = 1, ..., n$. Tästä seuraa

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ ... \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \bar{x}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (7.4) saadaan

$$M\bar{x} = g.$$

Jos matriisin M käänteismatriisi M^{-1} on olemassa, niin yhtälöryhmän (tai matriisiyhtälön) (7.4) *erityisratkaisu* on

$$\bar{x} = M^{-1}g. \tag{7.6}$$

7.1.4 Homogeenisen yhtälön ratkaisu

Homogeenisen yhtälön (7.5) ratkaisu saadaan *olettamalla, että kaikki tilamuuttujat* $x_1, ..., x_n$ *kasvavat samaa vakiovauhtia* r. Sijoitetaan siihen yrite

$$x_i = m_i e^{rt} \text{ kaikilla } i = 1, ..., n, \tag{7.7}$$

missä m_i ja r ovat vakioita. Matriisimuodossa tämä yrite on muotoa

$$u = rme^{rt}, \quad v = me^{rt}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ ... \\ m_n \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

Sijoittamalla (7.8) homogeeniseen yhtälöön (7.5) saadaan

$$Jmre^{rt} + Mme^{rt} = (rJ + M)me^{rt} = 0.$$

Supistamalla termi e^{rt} saadaan edelleen

$$(rJ + M)m = 0. \tag{7.9}$$

Mikäli kerroinmatriisin $(rJ + M)$ determinantti on nollasta eroava, niin silloin saadaan *triviaali ratkaisu*: $m = 0$ ja $x_i = 0$ kaikilla $i = 1, ..., n$. Tämä tarkoittaisi sitä, että systeemillä (7.4) ei olisi mitään dynamiikkaa, ts. se ei koskaan poikkeasi erityisratkaisusta $\bar{x}$, joka on vakio. Koska tämä tapaus ei ole mielenkiintoinen, oletamme, että

$$|rJ + M| = 0. \tag{7.10}$$

Koska $(n \times n)$-matriisin $(rJ + M)$ determinantti (7.10) on n:nnen asteen polynomi, sen ratkaisuna saadaan *karakteristiset juuret* $r_1, ..., r_n$. Sijoittamalla juuri $r = r_h$ homogeeniseen yhtälöön (7.9) saadaan juurta vastaava vektori m^h, jonka alkiot ovat kaikki vakiosuhteessa α_{ih} toisiinsa. Tällöin voimme valita

$$m^h = \begin{pmatrix} m_1^h \\ m_2^h \\ ... \\ m_n^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_h \\ \alpha_{2h} A_h \\ ... \\ \alpha_{nh} A_h \end{pmatrix}, \tag{7.11}$$

missä A_h on vakio. Tästä ja yritteestä (7.7) saadaan *homogeenisen yhtälön yleiseksi ratkaisuksi*

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_1 &= \sum_{h=1}^{n} m_1^h e^{rt} = \sum_{h=1}^{n} A_h e^{rt}, \\ \widetilde{x}_i &= \sum_{h=1}^{n} m_i^h e^{rt} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih} A_h e^{rt} \text{ kaikilla } i = 2, ..., n. \end{aligned} \tag{7.12}$$

7.1.5 Yleinen ratkaisu

Yhtälöryhmän (7.4) yleinen ratkaisu on erityisratkaisun (7.6) ja homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun (7.12) summa:

$$x = \bar{x} + \widetilde{x}$$

eli

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_1 + \widetilde{x}_1 = \bar{x}_1 + \sum_{h=1}^{n} A_h e^{rt}, \\ x_i &= \bar{x}_i + \widetilde{x}_i = \bar{x}_i + \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih} A_h e^{rt} \text{ kaikilla } i = 2, ..., n. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Vakiot $A_1, ..., A_n$ voidaan ratkaista alkuarvojen avulla.

7.2 Esimerkkejä differentiaaliyhtälöryhmistä

7.2.1 Esimerkki 1

Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) - 12y(t) &= -60, \\ y'(t) + x(t) + 6y(t) &= 36, \end{aligned} \tag{7.14}$$

alkuarvoilla $x(0) = 0$ *ja* $y(0) = 4$.

Erityisratkaisu:

Koska oikea puoli koostuu vakiotermeistä, yritetään vakiosijoitusta

$$x(t) = \mu, \quad y(t) = \eta, \quad x'(t) = 0, \quad y'(t) = 0.$$

Tästä saadaan

$$-\mu - 12\eta = -60, \quad \mu + 6\eta = 36.$$

Yhtälöryhmän ratkaisuna saadaan

$$\overline{x(t)} = \mu = 12, \quad \overline{y(t)} = \eta = 4.$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu:

Yhtälöryhmää (7.14) vastaava homogeeninen yhtälö on

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) - 12y(t) &= 0, \\ y'(t) + x(t) + 6y(t) &= 0. \end{aligned}$$

Kokeillaan tähän sijoitusta, jossa tilamuuttujat $x(t)$ ja $y(t)$ kasvavat samaa vakiovauhtia λ:

$$x(t) = me^{\lambda t}, \quad y(t) = ne^{\lambda t}, \quad x'(t) = \lambda me^{\lambda t}, \quad y(t) = \lambda ne^{\lambda t},$$

missä m ja n vakioita. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \lambda me^{\lambda t} - me^{\lambda t} - 12ne^{\lambda t} &= e^{\lambda t}[(\lambda - 1)m - 12n] = 0 \\ \lambda ne^{\lambda t} + me^{\lambda t} + 6ne^{\lambda t} &= e^{\lambda t}[(\lambda + 6)n + m] = 0. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan tämä matriisimuotoon:

$$\begin{pmatrix} (\lambda - 1)e^{\lambda t} & -12e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} & (\lambda + 6)e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -12 \\ 1 & \lambda + 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

Tällä matriisiyhtälöllä on olemassa ei-triviaali ratkaisu, jos seuraava *karakteristinen yhtälö* on voimassa:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -12 \\ 1 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 6) + 12 = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0.$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Nyt on ratkaistava näitä juuria vastaavat *ominaisvektorit* (m_1, n_1) ja (m_2, n_2), jotka toteuttavat matriisiyhtälön (7.15):

Sijoitetaan juuri $\lambda_1 = -2$ yhtälöön (7.15):

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -3m_1 - 12n_1 \\ m_1 + 4n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jolloin saadaan

$$-3m_1 - 12n_1 = 0, \quad m_1 + 4n_1 = 0.$$

Nämä molemmat yhtälöt toteuttavat ehdon

$$m_1 = -4n_1.$$

Sijoitetaan juuri $\lambda_1 = -3$ yhtälöön (7.15):

$$e^{-3t}\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = e^{-3t}\begin{pmatrix} -4m_2 - 12n_2 \\ m_2 + 3n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jolloin saadaan

$$-4m_1 - 12n_2 = 0, \quad m_2 + 3n_2 = 0.$$

Nämä molemmat yhtälöt toteuttavat ehdon

$$m_2 = -3n_2.$$

Merkitään $n_1 = A_1$ ja $n_2 = A_2$, jolloin $m_1 = -4A_1$ ja $m_2 = -3A_2$. Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{aligned} \widetilde{x(t)} &= m_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 e^{\lambda_2 t} = -4A_1 e^{-2t} - 3A_2 e^{-3t} \\ \widetilde{y(t)} &= n_1 e^{\lambda_1 t} + n_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}. \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu:

Summataan yhteen erityisratkaisu ja homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu:

$$x(t) = 12 - 4A_1 e^{-2t} - 3A_2 e^{-3t} \tag{7.16}$$

$$y(t) = 4 + A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}. \tag{7.17}$$

Koska juurten reaaliosat -2 ja -3 ovat negatiiviset, niin malli suppenee $x(t) \to 12$ ja $y(t) \to 4$.

Alkuarvojen määrittämä ratkaisu:

Alkuarvoista

$$\begin{aligned} x(0) &= 12 - 4A_1 - 3A_2 = 0 \\ y(0) &= 4 + A_1 + A_2 = 4, \end{aligned}$$

ratkaistaan

$$A_1 = 12, \quad A_2 = -12.$$

Sijoittamalla nämä yleiseen ratkaisuun saadaan

$$\begin{aligned} x(t) &= 12 - 48e^{-2t} + 36A_2 e^{-3t} \\ y(t) &= 4 + 12e^{-2t} - 12A_2 e^{-3t}. \end{aligned}$$

7.2.2 Esimerkki 2

Ratkaise differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} x'(t) - 2x(t) + 3y(t) &= 10, \\ y'(t) - x(t) + 2y(t) &= 9, \end{aligned} \tag{7.18}$$

alkuarvoilla $x(0) = 8$ *ja* $y(0) = 5$.

Erityisratkaisu:

Koska oikea puoli koostuu vakiotermeistä, yritetään vakiosijoitusta

$$x(t) = \mu, \quad y(t) = \eta, \quad x'(t) = 0, \quad y'(t) = 0.$$

Tästä saadaan

$$-2\mu + 3\eta = 10, \quad -\mu + 2\eta = 9.$$

Yhtälöryhmän ratkaisuna saadaan

$$\overline{x(t)} = \mu = 7, \quad \overline{y(t)} = \eta = 8.$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu:

Yhtälöryhmää (7.18) vastaava homogeeninen yhtälö on

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) - 12y(t) &= 0, \\ y'(t) + x(t) + 6y(t) &= 0. \end{aligned}$$

Kokeillaan tähän sijoitusta, jossa tilamuuttujat $x(t)$ ja $y(t)$ kasvavat samaa vakiovauhtia λ:

$$x(t) = me^{\lambda t}, \quad y(t) = ne^{\lambda t}, \quad x'(t) = \lambda me^{\lambda t}, \quad y(t) = \lambda ne^{\lambda t}.$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} \lambda me^{\lambda t} - 2me^{\lambda t} + 3ne^{\lambda t} &= e^{\lambda t}[(\lambda - 2)m + 3n] = 0 \\ \lambda ne^{\lambda t} - me^{\lambda t} + 2ne^{\lambda t} &= e^{\lambda t}[(\lambda + 2)n - m] = 0. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan tämä matriisimuotoon:

$$e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -1 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.19}$$

Tällä matriisiyhtälöllä on olemassa ei-triviaali ratkaisu, jos seuraava *karakteristinen yhtälö* on voimassa:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 2) + 3 = \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Nyt on ratkaistava näitä juuria vastaavat *ominaisvektorit* (m_1, n_1) ja (m_2, n_2), jotka toteuttavat matriisiyhtälön (7.19):

Sijoitetaan juuri $\lambda_1 = 1$ yhtälöön (7.19):

$$e^t \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_1 + 3n_1 \\ -m_1 + 3n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jolloin saadaan

$$-m_1 + 3n_1 = 0, \quad -m_1 + 3n_1 = 0.$$

Nämä molemmat yhtälöt toteuttavat ehdon

$$m_1 = 3n_1.$$

Sijoitetaan juuri $\lambda_1 = -1$ yhtälöön (7.19):

$$e^{-t} \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3m_2 + 3n_2 \\ -m_2 + n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jolloin saadaan yhtälöryhmä

$$-3m_2 + 3n_2 = 0, \quad -m_2 + n_2 = 0.$$

Nämä molemmat yhtälöt toteuttavat ehdon

$$m_2 = n_2.$$

Merkitään $n_1 = A_1$ ja $n_2 = A_2$, jolloin $m_1 = 3A_1$ ja $m_2 = A_2$. Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{aligned} \widetilde{x(t)} &= m_1 e^{\lambda_1 t} + m_2 e^{\lambda_2 t} = 3A_1 e^t + A_2 e^{-t} \\ \widetilde{y(t)} &= n_1 e^{\lambda_1 t} + n_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^t + A_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu:

Summataan yhteen erityisratkaisu ja homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu:

$$\begin{aligned} x(t) &= 7 + 3A_1 e^t + A_2 e^{-t} \\ y(t) &= 8 + A_1 e^t + A_2 e^{-t}. \end{aligned}$$

Koska yhden juurten reaaliosat -1 on negatiivinen, niin tämä kehitysura suppenee kohden uraa

$$\begin{aligned} x(t) &= 7 + 3A_1 e^t \\ y(t) &= 8 + A_1 e^t. \end{aligned}$$

kun $t \to \infty$.

Alkuarvojen määrittämä ratkaisu:

Alkuarvoista

$$
\begin{aligned}
x(0) &= 7 + 3A_1 + A_2 = 8 \\
y(0) &= 8 + A_1 + A_2 = 5,
\end{aligned}
$$

ratkaistaan

$$A_1 = 2, \quad A_2 = -5.$$

Sijoittamalla nämä yleiseen ratkaisuun saadaan

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 7 + 6e^t - 5A_2e^{-t} \\
y(t) &= 4 + 2e^t - 5A_2e^{-t}.
\end{aligned}
$$

7.3 Differenssiyhtälöryhmät

7.3.1 Yleistä

Differenssiyhtälöt kannattaa muuntaa muotoon, jossa joka yhtälössä on vain yksi periodia $t+1$ vastaava arvo. Olkoon meillä esimerkiksi yhtälö

$$y_{t+3} + \beta y_{t+2} + \gamma y_{t+1} + \eta y_t = 0.$$

Määrittelemällä uudet tilamuuttujat $x_t = y_{t+1}$ ja $z_t = x_{t+1} = y_{t+2}$ saadaan tästä yhtälöryhmä, jossa on yhtä monta tilamuuttujaa kuin yhtälöä ja jossa kullakin rivillä vain yksi tilamuuttujista on periodilla $t+1$:

$$
\begin{cases}
z_{t+1} + \beta z_t + \gamma x_t + \eta y_t = 0 \\
y_{t+1} - x_t = 0 \\
x_{t+1} - z_t = 0
\end{cases}
$$

missä x, y ja z ovat tilamuuttujia.

7.3.2 Perusongelma

Tarkastellaan differenssiyhtälöryhmää

$$
\begin{aligned}
& x_{1,t+1} + k_{11}x_{1,t} + ... + k_{1n}x_{n,t} = f_1 \\
& x_{2,t+1} + k_{21}x_{1,t} + ... + k_{2n}x_{n,t} = f_2 \\
& ... \\
& x_{n,t+1} + k_{11}x_{n,t} + ... + k_{nn}x_{n,t} = f_n
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

jossa $x_1, ..., x_n$ ovat tilamuuttujia ja $f_1, ..., f_n$ vakioita. Tämä voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$Iu + Kv = f, \tag{7.21}$$

missä

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & ... & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & ... & k_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{n1} & k_{n2} & ... & k_{nn} \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ ... \\ x_{n,t+1} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ ... \\ x_{n,t} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Differenssiyhtälöiden tapaan yritämme löytää ensiksi erityisratkaisun yhtälölle (7.21) ja sitten yleisen ratkaisun vastaavalle homogeemiselle yhtälölle

$$Iu + Kv = 0. \tag{7.22}$$

Laskemalla nämä yhteen saadaan yhtälön (7.21) yleinen ratkaisu.

7.3.3 Erityisratkaisu

Koska yhtälöryhmässä (7.21) oikea puoli on vakio, erityisratkaisun saamiseksi kokeillaan sijoitusta, jossa tilamuuttujat ovat vakioita: $x_{i,t} = \bar{x}_i$ kaikilla $i = 1, ..., n$. Tästä seuraa

$$u = \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \\ ... \\ x_{n,t+1} \end{pmatrix} = v = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \\ ... \\ x_{n,t} \end{pmatrix} = \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ ... \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (7.21) saadaan

$$(I + K)\bar{x} = f.$$

Jos matriisin $I + K$ käänteismatriisi $(K + I)^{-1}$ on olemassa, niin yhtälöryhmän (tai matriisiyhtälön) (7.21) *erityisratkaisu* on

$$\bar{x} = (I + K)^{-1} f. \tag{7.23}$$

7.3.4 Homogeenisen yhtälön ratkaisu

Homogeenisen yhtälön (7.22) ratkaisu saadaan *olettamalla, että kaikki tilamuuttujat $x_1, ..., x_n$ kasvavat samaa vakiovauhtia b.* Sijoitetaan siihen yrite

$$x_{i,t} = m_i b^t \text{ kaikilla } i = 1, ..., n, \tag{7.24}$$

missä m_i ja b ovat vakioita. Matriisimuodossa tämä yrite on muotoa

$$u = mb^{t+1}, \quad v = mb^t, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ ... \\ m_n \end{pmatrix}. \tag{7.25}$$

Sijoittamalla (7.25) homogeeniseen yhtälöön (7.22) saadaan

$$Imb^{t+1} + Kmb^t = (bI + K)mb^t = 0.$$

Supistamalla termi b^t saadaan edelleen

$$(bI + K)m = 0. \tag{7.26}$$

Mikäli kerroinmatriisin $(bI + K)$ determinantti on nollasta eroava, niin silloin saadaan *triviaali ratkaisu*: $m = 0$, $m_1 = ... = m_n = 0$ ja $x_{i,t} = 0$ kaikilla $i = 1, ..., n$. Tämä tarkoittaisi sitä, että systeemillä (7.21) ei olisi mitään dynamiikkaa, ts. se ei koskaan poikkeasi erityisratkaisusta $\bar{x}$, joka on vakio. Koska tämä tapaus ei ole mielenkiintoinen, oletamme, että

$$|bI + K| = 0. \tag{7.27}$$

Koska $(n\times n)$-matriisin $(bI+K)$ determinantti (7.27) on n:nnen asteen polynomi, sen ratkaisuna saadaan *karakteristiset juuret* $b_1, ..., b_n$. Sijoittamalla juuri $b = b_h$ homogeeniseen yhtälöön (7.26) saadaan juurta vastaava vektori m^h, jonka alkiot ovat kaikki vakiosuhteessa α_{ih} toisiinsa. Tällöin voimme valita

$$m^h = \begin{pmatrix} m_1^h \\ m_2^h \\ ... \\ m_n^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_h \\ \alpha_{2h}A_h \\ ... \\ \alpha_{nh}A_h \end{pmatrix}, \tag{7.28}$$

missä A_h on vakio. Tästä ja yritteestä (7.24) saadaan *homogeenisen yhtälön yleiseksi ratkaisuksi*

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_{1,t} &= \sum_{h=1}^{n} m_1^h b_h^t = \sum_{h=1}^{n} A_h b_h^t, \\ \widetilde{x}_{i,t} &= \sum_{h=1}^{n} m_i^h b_h^t = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih} A_h b_h^t \text{ kaikilla } i = 2, ..., n. \end{aligned} \tag{7.29}$$

7.3.5 Yleinen ratkaisu

Yhtälöryhmän (7.21) yleinen ratkaisu on erityisratkaisun (7.23) ja homogeenisen yhtälön yleisen ratkaisun (7.29) summa:

$$x_t = \bar{x} + \widetilde{x}_t$$

eli

$$\begin{aligned} x_{1,t} &= \bar{x}_1 + \widetilde{x}_{1,t} = \bar{x}_1 + \sum_{h=1}^{n} A_h b_h^t, \\ x_{i,t} &= \bar{x}_i + \widetilde{x}_{i,t} = \bar{x}_i + \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih} A_h b_h^t \text{ kaikilla } i = 2, ..., n. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Vakiot $A_1, ..., A_n$ voidaan ratkaista alkuarvojen avulla.

7.4 Esimerkkejä differenssiyhtälöryhmistä

7.4.1 Esimerkki 1

Ratkaise differenssiyhtälöryhmä

$$\begin{aligned} x_{t+1} + x_t + 2y_t &= 24, \\ y_{t+1} + 2x_t - 2y_t &= 9, \end{aligned} \tag{7.31}$$

alkuarvoilla $x_0 = 10$ *ja* $y_0 = 9$.

Erityisratkaisu:

Koska oikea puoli koostuu vakiotermeistä, yritetään vakiosijoitusta

$$x_t = a, \quad y_t = b, \quad x_{t+1} = a, \quad y_{t+1} = b.$$

Tästä saadaan

$$a + a + 2b = 24, \quad b + 2a - 2b = 9.$$

Yhtälöryhmän ratkaisuna saadaan

$$\overline{x}_t = a = 7, \quad \overline{y}_t = b = 5.$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu:

Yhtälöryhmää (7.31) vastaava homogeeninen yhtälö on

$$\begin{aligned} x_{t+1} + x_t + 2y_t &= 0, \\ y_{t+1} + 2x_t - 2y_t &= 0, \end{aligned}$$

Kokeillaan tähän sijoitusta, jossa tilamuuttujat x_t ja y_t kasvavat samaa vakiovauhtia k:

$$x_t = mk^t, \quad y_t = nk^t, \quad x_{t+1} = mk^{t+1}, \quad y_{t+1} = ne^{t+1}.$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} mk^{t+1} + mk^t + 2nk^t &= k^t[(k+1)m + 2n] = 0 \\ nk^{t+1} + 2mk^t - 2nk^t &= k^t[2m + n(k-2)] = 0. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan tämä matriisimuotoon:

$$k^t \begin{pmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.32}$$

Tällä matriisiyhtälöllä on olemassa ei-triviaali ratkaisu, jos seuraava *karakteristinen yhtälö* on voimassa:

$$\begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ 2 & k-2 \end{vmatrix} = (k+1)(k-2) - 4 = k^2 + k - 2k - 2 - 4 = k^2 - k - 6 = 0.$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat

$$k_1 = -2, \quad k_2 = 3.$$

Nyt on ratkaistava näitä juuria vastaavat *ominaisvektorit* (m_1, n_1) ja (m_2, n_2), jotka toteuttavat matriisiyhtälön (7.32):

Sijoitetaan juuri $k_1 = -2$ yhtälöön (7.32):

$$(-2)^t \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = (-2)^t \begin{pmatrix} -m_1 + 2n_1 \\ 2m_1 - 4n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jolloin saadaan

$$-m_1 + 2n_1 = 0, \quad 2m_1 - 4n_1 = 0.$$

Nämä molemmat yhtälöt toteuttavat ehdon

$$m_1 = 2n_1.$$

Sijoitetaan juuri $\lambda_1 = 3$ yhtälöön (7.32):

$$3^t \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = 3^t \begin{pmatrix} 4m_2 + 2n_2 \\ 2m_2 + n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jolloin saadaan yhtälöryhmä

$$4m_2 + 2n_2 = 0, \quad 2m_2 + n_2 = 0.$$

Nämä molemmat yhtälöt toteuttavat ehdon

$$m_2 = -\frac{1}{2} n_2.$$

Merkitään $n_1 = A_1$ ja $n_2 = A_2$, jolloin $m_1 = 2A_1$ ja $m_2 = -\frac{1}{2}A_2$. Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_t &= m_1(-2)^t + m_2 3^t = 2A_1(-2)^t - \frac{1}{2}A_2 3^t \\ \widetilde{y}_t &= n_1 e^{\lambda_1 t} + n_2 e^{\lambda_2 t} = A_1(-2)^t + A_2 3^t. \end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu:

Summataan yhteen erityisratkaisu ja homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu:

$$\begin{aligned} x_t &= 7 + 2A_1(-2)^t - \frac{1}{2}A_2 3^t \\ y_t &= 5 + A_1(-2)^t + A_2 3^t. \end{aligned}$$

Alkuarvojen määrittämä ratkaisu:

Alkuarvoista

$$\begin{aligned}
x_0 &= 7 + 2A_1 - \frac{1}{2}A_2 = 10 \\
y_0 &= 5 + A_1 + A_2 = 9,
\end{aligned}$$

ratkaistaan

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 2.$$

Sijoittamalla nämä yleiseen ratkaisuun saadaan

$$\begin{aligned}
x_t &= 7 + 4(-2)^t - 3^t \\
y_t &= 5 + 2(-2)^t + 2 \cdot 3^t.
\end{aligned}$$

7.4.2 Esimerkki 2

Ratkaise differenssiyhtälöryhmä

$$\begin{aligned}
x_{t+1} - x_t - \frac{1}{3}y_t &= -1, \\
y_{t+1} + x_{t+1} - \frac{1}{6}y_t &= 8\frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{7.33}$$

alkuarvoilla $x_0 = 5$ *ja* $y_0 = 4$.

Erityisratkaisu:

Koska oikea puoli koostuu vakiotermeistä, yritetään vakiosijoitusta

$$x_t = a, \quad y_t = b, \quad x_{t+1} = a, \quad y_{t+1} = b.$$

Tästä saadaan

$$a - a - \frac{b}{3} = -1, \quad a + b - \frac{b}{6} = 8\frac{1}{2}.$$

Yhtälöryhmän ratkaisuna saadaan

$$\overline{x}_t = a = 6, \quad \overline{y}_t = b = 3.$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu:

Yhtälöryhmää (7.33) vastaava homogeeninen yhtälö on

$$\begin{aligned}
x_{t+1} - x_t - \frac{1}{3}y_t &= 0, \\
y_{t+1} + x_{t+1} - \frac{1}{6}y_t &= 0
\end{aligned}$$

Kokeillaan tähän sijoitusta, jossa tilamuuttujat x_t ja y_t kasvavat samaa vakiovauhtia k:

$$x_t = mk^t, \quad y_t = nk^t, \quad x_{t+1} = mk^{t+1}, \quad y_{t+1} = ne^{t+1}.$$

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} mk^{t+1} - mk^t - \frac{1}{3}nk^t &= k^t\Big[(k-1)m - \frac{1}{3}n\Big] = 0 \\ nk^{t+1} + mk^{t+1} - \frac{1}{6}nk^t &= k^t\Big[mk + \Big(k - \frac{1}{6}\Big)n\Big] = 0. \end{aligned}$$

Kirjoitetaan tämä matriisimuotoon:

$$k^t \begin{pmatrix} k-1 & -\frac{1}{3} \\ k & k-\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.34}$$

Tällä matriisiyhtälöllä on olemassa ei-triviaali ratkaisu, jos seuraava *karakteristinen yhtälö* on voimassa:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k-1 & -\frac{1}{3} \\ k & k-\frac{1}{6} \end{vmatrix} &= (k-1)(k-\frac{1}{6}) + \frac{1}{3}k = k^2 - \frac{1}{6}k - k + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}k \\ &= k^2 - \frac{5}{6}k + \frac{1}{6} = 0. \end{aligned}$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = \frac{1}{3}.$$

Nyt on ratkaistava näitä juuria vastaavat *ominaisvektorit* (m_1, n_1) ja (m_2, n_2), jotka toteuttavat matriisiyhtälön (7.34):

Sijoitetaan juuri $k_1 = \frac{1}{2}$ yhtälöön (7.34):

$$\Big(\frac{1}{2}\Big)^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}m_1 - \frac{1}{3}n_1 \\ \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{3}n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jolloin saadaan

$$-\frac{1}{2}m_1 - \frac{1}{3}n_1 = 0, \quad \frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{3}n_1 = 0.$$

Nämä molemmat yhtälöt toteuttavat ehdon

$$m_1 = -\frac{2}{3}n_1.$$

Sijoitetaan juuri $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ yhtälöön (7.34):

$$\Big(\frac{1}{3}\Big)^t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \Big(\frac{1}{3}\Big)^t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}m_2 - \frac{1}{3}n_2 \\ \frac{1}{3}m_2 + \frac{1}{6}n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

jolloin saadaan yhtälöryhmä

$$-\frac{2}{3}m_2 - \frac{1}{3}n_2 = 0, \quad \frac{1}{3}m_2 + \frac{1}{6}n_2 = 0.$$

Nämä molemmat yhtälöt toteuttavat ehdon

$$m_2 = -\frac{1}{2}n_2.$$

Merkitään $n_1 = A_1$ ja $n_2 = A_2$, jolloin $m_1 = -\frac{2}{3}A_1$ ja $m_2 = -\frac{1}{2}A_2$. Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisuiksi saadaan

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_t &= m_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + m_2\left(\frac{1}{3}\right)^t = -\frac{2}{3}A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t - \frac{1}{2}A_2 3^t \\ \widetilde{y}_t &= n_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + n_2\left(\frac{1}{3}\right)^t = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_2\left(\frac{1}{3}\right)^t.\end{aligned}$$

Yleinen ratkaisu:

Summataan yhteen erityisratkaisu ja homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu:

$$\begin{aligned}x_t &= 6 - \frac{2}{3}A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t - \frac{1}{2}A_2 3^t \\ y_t &= 3 + A_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + A_2\left(\frac{1}{3}\right)^t.\end{aligned}$$

Alkuarvojen määrittämä ratkaisu:

Alkuarvoista

$$\begin{aligned}x_0 &= 6 - \frac{2}{3}A_1 - \frac{1}{2}A_2 = 5 \\ y_0 &= 3 + A_1 + A_2 = 4\end{aligned}$$

ratkaistaan

$$A_1 = 3, \quad A_2 = -2.$$

Sijoittamalla nämä yleiseen ratkaisuun saadaan

$$\begin{aligned}x_t &= 6 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^t + 3^t \\ y_t &= 3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^t - 2\left(\frac{1}{3}\right)^t.\end{aligned}$$

8 3. Simultaaniset 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmät

8.1 Kahden muuttujan systeemi

Systeemiä sanotaan *jatkuvaksi*, jos sitä voidaan kuvata differentiaaliyhtälöillä, ja *diskreetiksi*, jos sitä voidaan kuvata differenssiyhtälöillä. Tässä tarkastelemme kahden muuttujan (merkitään x ja y) jatkuvaa systeemiä

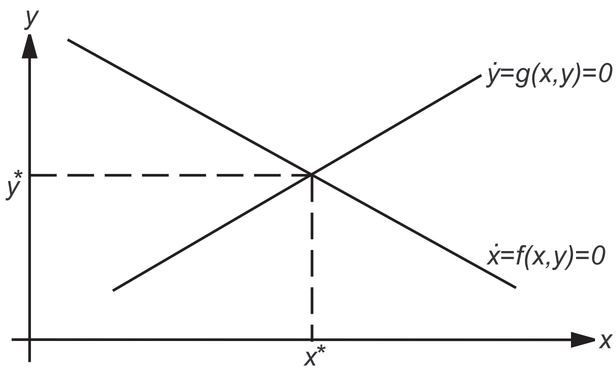
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x,y), \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = g(x,y), \tag{8.1}$$

missä t on aika tai muu jatkuvasti etenevä muuttuja. Tämän ryhmän yhtälöt ovat 1. kertalukua (so. korkein aikaderivaatta on 1. astetta) ja *autonomisia* (so. funktiot f ja g eivät suoraan riipu ajasta, vaan ainoastaan muuttujien x ja y välityksellä). Jos esim. $\dot{x} = f(x,y,t)$, niin kysymys olisi ei-autonomisesta systeemistä.

8.2 Graafinen analyysi

Yhtälöryhmän (8.1) analyysi on helpointa suorittaa graafisesti (x,y) tasossa. Matemaattinen analyysi, jonka esitämme myöhemmin, on graafisen analyysin kanssa yhtäpitävä. Tätä varten piirrämme ensiksi *singulaarikäyrät* asettamalla aikaderivaatat nolliksi:

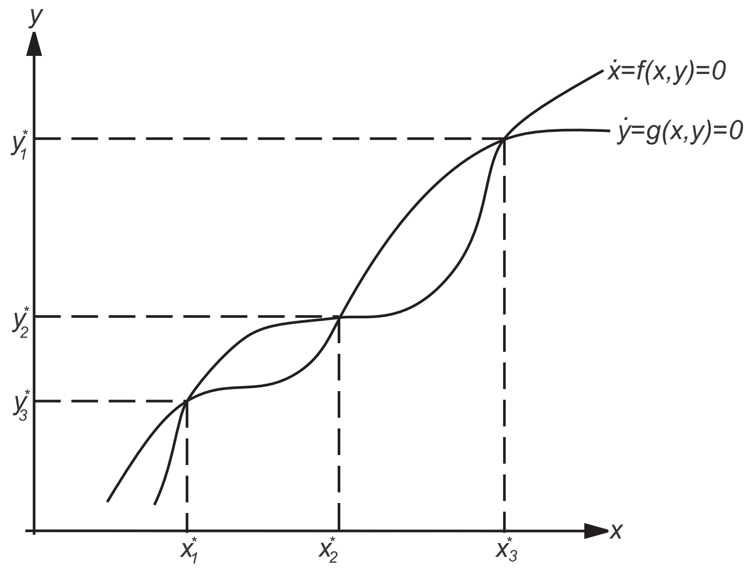
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x,y) = 0, \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = g(x,y) = 0.$$



Kuva 8.1.

Riippuen osittaisderivaattojen f_x, f_y, g_x ja g_y etumerkeistä sekä käyrä ($\dot{x} = 0$) että käyrä ($\dot{y} = 0$) voivat olla joko nousevia tai laskevia. Eo. kuviossa on vain havainnollisuuden vuoksi toinen piirretty nousevaksi ja toinen laskevaksi. Singulaarikäyrien leikkauspiste (x^*, y^*) on systeemin (8.1) *tasapainopiste*: kumpikaan muuttujista x ja y ei muutu pisteessä (x^*, y^*), koska siinä $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

Riippuen funktioiden $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ muodosta systeemillä (8.1) voi olla myös useampia tasapainopisteitä:



Kuva 8.2.

Kuviossa (x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), (x_3^*, y_3^*) ja (x_4^*, y_4^*) ovat kaikki tasapanopisteitä. Koska systeemin (8.1) tulee hyvin monimutkaiseksi silloin, kun sillä on useita tasapainopisteitä. rajoitumme tässä vain tapaukseen, jossa systeemillä (8.1) on vain yksi tasapainopiste (so. tasapaino on *yksikäsitteinen*).

Singulaariurien kulmakertoimet saadaan käyttäen hyväksi implisiittistä derivointia:

$$\dot{x} = f(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_x dx + f_y dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{\dot{x}=0} = -\frac{f_x}{f_y},$$

$$\dot{y} = g(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g_x dx + g_y dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{\dot{y}=0} = -\frac{g_x}{g_y},$$

missä

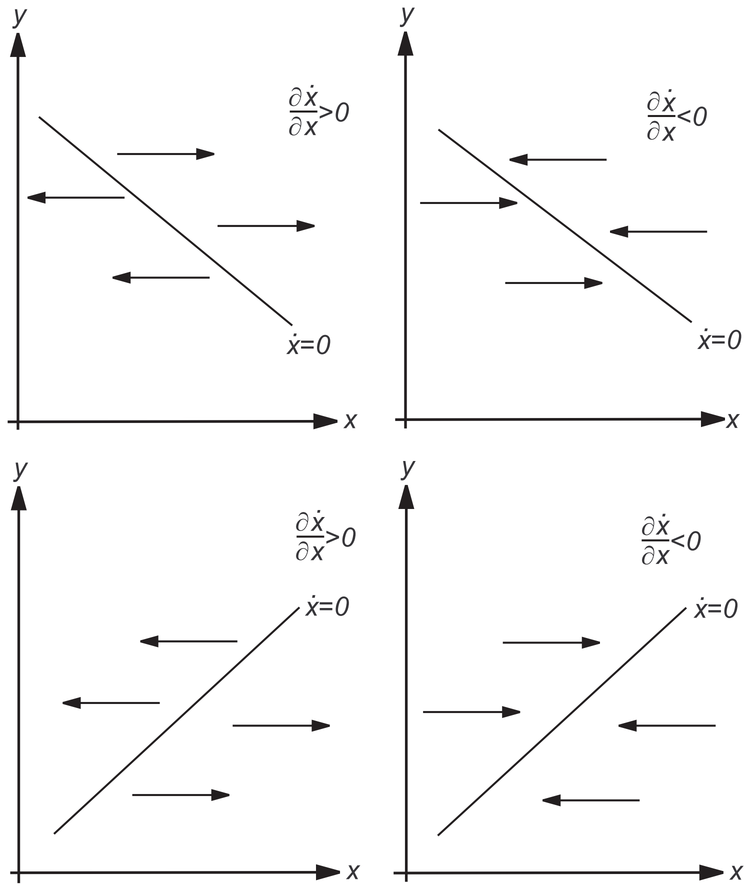
$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\dot{x}=0} = -\frac{f_x}{f_y} \quad \text{käyrän } (\dot{x}=0) \text{ kulmakerroin, kun } f_y \neq 0,$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\dot{x}=0} = -\frac{g_x}{g_y} \quad \text{käyrän } (\dot{y}=0) \text{ kulmakerroin, kun } g_y \neq 0.$$

Jos $f_y \equiv 0$, niin käyrä $(\dot{x} = f(x) = 0)$ on riippumaton y:stä ja siten (x, y) tasossa pystysuora. Jos $g_y \equiv 0$, niin käyrä $(\dot{y} = g(x) = 0)$ on riippumaton y:stä ja siten (x, y) tasossa pystysuora.

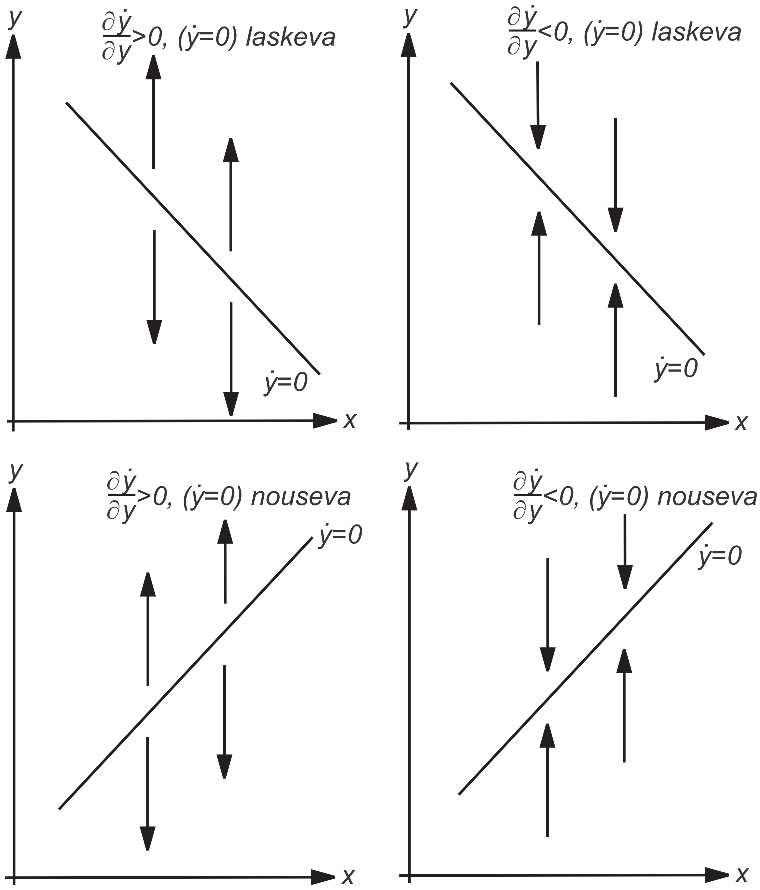
Singulaarikäyrät $(\dot{x} = 0)$ ja $(\dot{y} = 0)$ jakavat (x, y) tason neljään osaan. Se, miten systeemi (8.1) liikkuu näissä neljässä osassa, voidaan ratkaista seuraavien sääntöjen avulla.

Sääntö 1. Jos $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = f_x > 0$, niin käyrän ($\dot{x} = 0$) molemmin puolin muuttuja x etääntyy käyrästä ($\dot{x} = 0$). Jos $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = f_x < 0$, niin käyrän ($\dot{x} = 0$) molemmin puolin muuttuja x lähestyy käyrää ($\dot{x} = 0$).



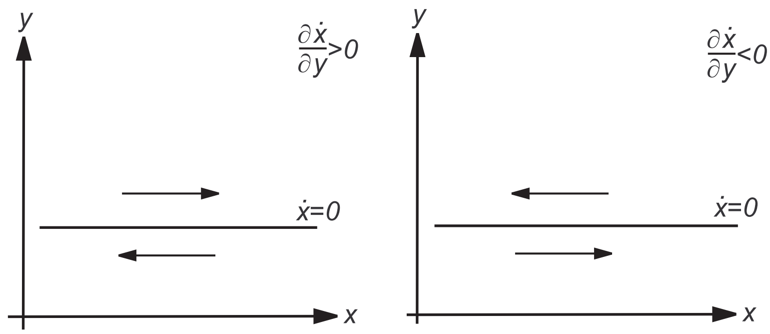
Kuva 8.3.

Sääntö 2. Jos $\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = g_y > 0$, niin käyrän ($\dot{y} = 0$) molemmin puolin muuttuja y etääntyy käyrästä ($\dot{y} = 0$). Jos $\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = g_y < 0$, niin käyrän ($\dot{y} = 0$) molemmin puolin muuttuja y lähestyy käyrää ($\dot{y} = 0$).



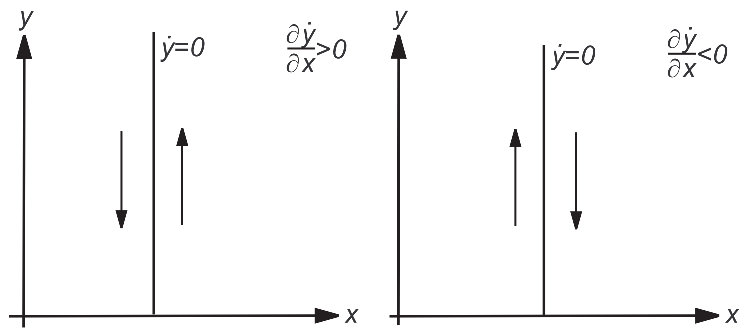
Kuva 8.4.

Sääntö 3. Siinä erikoistapauksessa, että käyrä ($\dot{x} = 0$) on vaakasuora, sääntö 1. voidaan korvata seuraavalla (voidaan käyttää myös muuten). Jos $\frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = f_y > 0$, niin käyrän ($\dot{x} = 0$) yläpuolella x kasvaa ja alapuolella x pienenee. Jos $\frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = f_y < 0$, niin käyrän ($\dot{x} = 0$) yläpuolella x pienenee ja alapuolella x kasvaa.



Kuva 8.5.

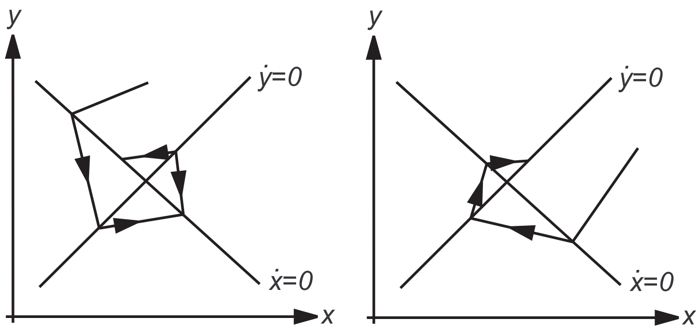
Sääntö 4. Siinä erikoistapauksessa, että käyrä ($\dot{y} = 0$) on pystysuora, sääntö 2. voidaan korvata seuraavalla (voidaan käyttää myös muuten). Jos $\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = g_x > 0$, niin käyrän ($\dot{y} = 0$) oikealla puolella y kasvaa ja vasemmalla puolella y pienenee. Jos $\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = g_x < 0$, niin käyrän ($\dot{y} = 0$) oikealla puolella y pienenee ja vasemmalla puolella y kasvaa.



Kuva 8.6.

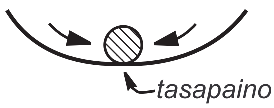
Taloudellisen tulkinnan kannalta systeemin (8.1) stabiilisuusominaisuudet ovat olennaisia. Tässä on olemassa kolme mahdollisuutta: globaalisti stabiili ratkaisu, globaalisti epästabiili ratkaisu sekä satulapisteratkaisu.

Tapaus 1. Systeemi (8.1) on *globaalisti stabiili* (*globally stable*). Tämä tarkoittaa sitä, että lähdettiinpä mistä tahansa xy-tason pisteestä, systeemi (8.1) päätyy lopulta tasapainoon (x^*, y^*).
Esim.



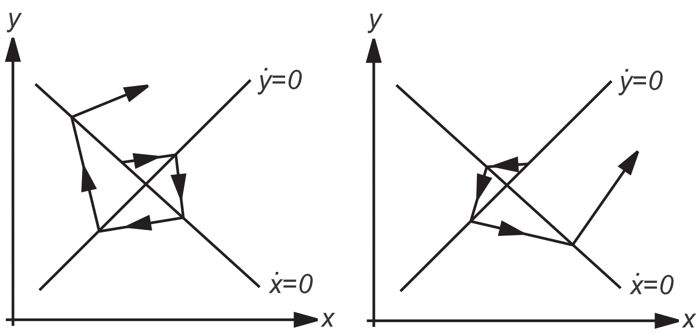
Kuva 8.7.

vastaa fysikaalista tilannetta:



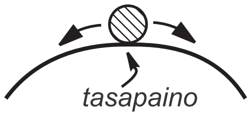
Kuva 8.8.

Tapaus 2. Systeemi (8.1) on *globaalisti epästabiili* (*globally unstable*). Tämä tarkoittaa sitä, että lähdettiinpä mistä tahansta xy-tason pisteestä tasapainopisteen (x^*, y^*) ulkopuolelta, niin systeemi (8.1) erkaantuu yhä kauemmas tasapainosta (x^*, y^*)
Esim.



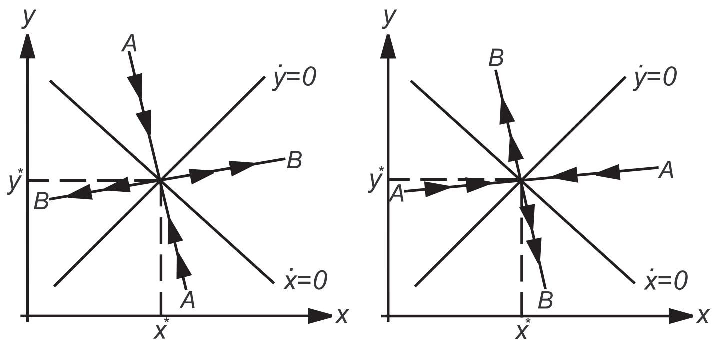
Kuva 8.9.

vastaa fysikaalista tilannetta:



Kuva 8.10.

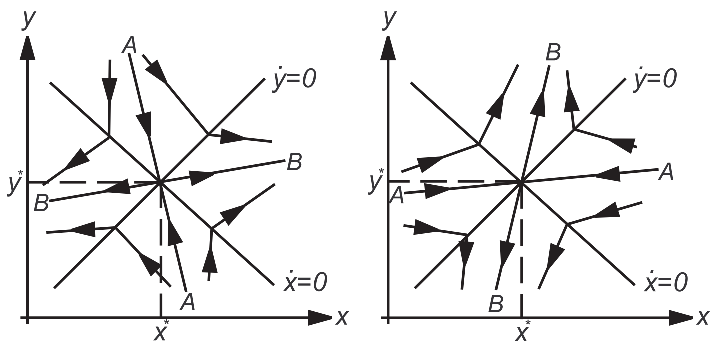
Tapaus 3. Systeemi (8.1) on *satulapisteura* (*saddlepoint path*). Tämä tarkoittaa sitä, että jokaista x:n arvoa kohti on olemassa vain yksi y:n arvo, josta tasapaino (x^*, y^*) voidaan saavuttaa.
Esim.



Kuva 8.11.

Kuviossa AA on satulapisteura, jota pitkin tasapaino (x^*, y^*) voidaan saavuttaa.

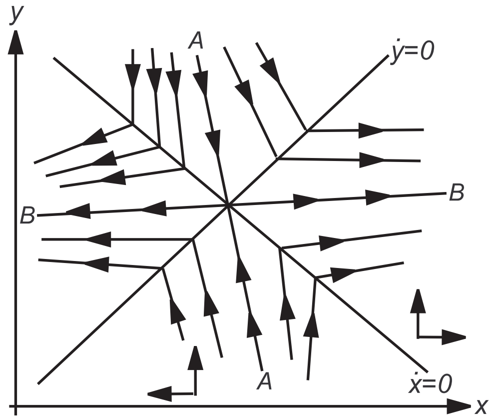
Jos systeemissä (8.1) on olemassa satulapisteura AA niin silloin systeemissä (8.1) on olemassa myös ura BB, jota kohden kaikki muut kehitysurat paitsi satulapisteura AA lähestvät asymptoottisesti.



Kuva 8.12.

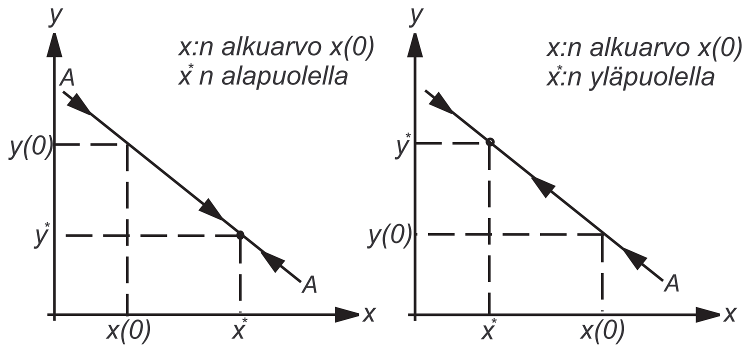
Siis jos 'horjahdetaan' satulapisteuralta AA sivuun, alkaa systeemi kehittyä kohden uraa BB.

Näitä epästabiileita uria on periaatteessa ääretön määrä eli kokonainen parvi:



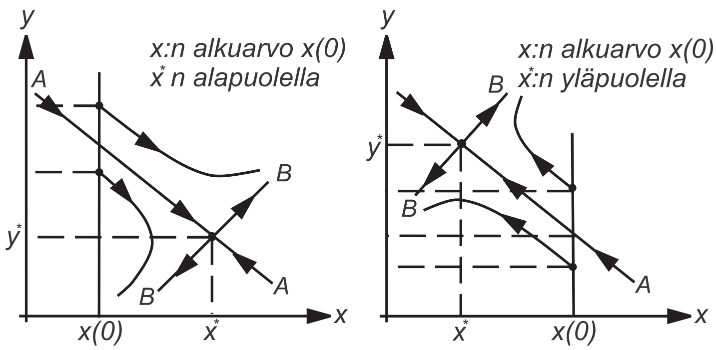
Kuva 8.13.

Sitä, että jokaista x:n arvoa vastaa vain yksi sellainen y:n arvo, josta tasapaino (x^*, y^*) voidaan saavuttaa, voidaan havainnollistaa seuraavasti:



Kuva 8.14.

Jos y:n alkuarvo ei satu olemaan $y(0)$ vaan jokin muu, päätyy systeemi erkaantumaan loputtomasti tasapainosta (x^*, y^*).



Kuva 8.15.

Jos $x(0)$:aa vastaava y:n alkuarvo valitaan $y(0)$:n vierestä, niin systeemi on epästabiililla uralla, joka lähenee asymptoottisesti uraa BB.

8.3 Matemaattinen analyysi

Esitämme nyt matemaattisen tavan ratkaista sama, mikä yllä tehtiin graafisesti. Lähtökohtana on, että systeemi (8.1) pyöristetään Taylorin kehitelmän avulla tasapainopisteen (x^*, y^*) ympäristössä lineaariseen muotoon:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{pmatrix}, \tag{8.2}$$

missä $a \equiv f_x$, $b \equiv f_y$, $c \equiv g_x$ ja $h \equiv g_y$ on saatu vakioiksi sijoittamalla $x = x^*$ ja $y = y^*$. Tämä voidaan ilmaista myös seuraavalla tavalla:

$$a = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\bigg|_{\dot{x}=\dot{y}=0}, \qquad b = \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\bigg|_{\dot{x}=\dot{y}=0}, \qquad c = \frac{\partial \dot{y}}{\partial x}\bigg|_{\dot{x}=\dot{y}=0}, \qquad h = \frac{\partial \dot{y}}{\partial y}\bigg|_{\dot{x}=\dot{y}=0},$$

missä ehto $\dot{x} = \dot{y} = 0$ tarkoittaa, että osittaisderivaatta on laskettava tasapainopisteessä (x^*, y^*), jossa $\dot{x} = \dot{y} = 0$ on voimassa.

Yhtälön (8.2) kerroinmatriisin karakteristinen yhtälö saadaan vähentämällä sen diagonaalialkioista u ja asettamalla saadun matriisin determinantti nollaksi:

$$\begin{pmatrix} a - u & b \\ c & h - u \end{pmatrix} = u^2 - (a + h)u + ah - cb = 0. \tag{8.3}$$

Karakteristinen yhtälö (8.3) on toisen asteen polynomi u:n suhteen. Sen juuret ovat

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}[a + h - \sqrt{(a + h)^2 + 4(bc - ah)}], \\ u_2 = \frac{1}{2}[a + h + \sqrt{(a + h)^2 + 4(bc - ah)}]. \end{cases} \tag{8.4}$$

Jos molempien juurten u_1 ja u_2 reaaliosat ovat negatiiviset, systeemit (8.1) ja (8.2) ovat globaalisti stabiileja eli ne hakeutuvat tasapainoon (x^*, y^*). Jos molempien juurten reaaliosat ovat positiiviset, systeemit (8.1) ja (8.2) ovat globaalisti epästabiileja eli ne erkaantuvat tasapainosta (x^*, y^*), mikäli ne eivät satu jo alunpitäen olemaan tasapainossa. Jos toisen juuren reaaliosa on positiivinen ja toisen negatiivinen, niin saadaan satulapisteratkaisu.

Oletetaan ensiksi $(a+h)^2 + 4(bc-ah) < 0$. Tällöin yhtälöistä (8.4) saadaan

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}[a + h - i\sqrt{4(ah-bc)-(a+h)^2}], \\ u_2 = \frac{1}{2}[a + h + i\sqrt{4(ah-bc)-(a+h)^2}], \end{cases}$$

missä i on imaginääriluku ja neliönjuuritermi on positiivinen.

Täten $Re(u_1) = Re(u_2) = a + h$, joten systeemi on joko globaalisti stabiili kun $a+h < 0$ tai globaalisti epästabiili kun $a+h > 0$. Siis satulapisteratkaisuun pyrkiäksemme meidän on oletettava

$$(a+h)^2 + 4(bc-ah) > 0. \tag{8.5}$$

Tällöin (8.4):n nojalla molemmat juuret u_1 ja u_2 ovat reaalilukuja.

Yhtälöiden (8.4) nojalla saadaan reaalisille juurille u_1 ja u_2

$$u_1 + u_2 = a + h, \quad u_1 u_2 = \frac{1}{4}\{(a+h)^2 - [(a+h)^2 + 4(bc-ah)]\} = ah - bc.$$

Nyt jos $ah > bc$, juuret u_1 ja u_2 ovat samanmerkkiset, joten systeemi on globaalisti stabiili kun $a+h < 0$ ja epästabiili kun $a+h > 0$. Siis satulapisteratkaisuun pyrkiäksemme meidän on oletettava, että

$$ah < bc. \tag{8.6}$$

Tällöin myös ehto (8.5) on automaattisesti voimassa.

Tulos 1:

(i) *Jos $ah < bc$, niin systeemillä (8.1) on satulapisteratkaisu;*

(ii) *jos $ah > bc$ ja $a + h < 0$, niin systeemi (8.1) on globaalisti stabiili; ja*

(iii) *jos $ah > bc$ ja $a + h > 0$, niin systeemi (8.1) on globaalisti epästabiili.*

Tämä tulos voidaan kirjoittaa myös seuraavaan muotoon:

Tulos 2:

(i) *Jos tasapainossa $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ehto $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} < \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}$ on voimassa, niin systeemillä (8.1) on satulapisteratkaisu;*

(ii) *jos tasapainossa $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ehdot $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} > \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}$ ja $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} < 0$ ovat voimassa, niin systeemi (8.1) on globaalisti stabiili; ja*

(iii) *jos tasapainossa $\dot{x} = \dot{y} = 0$ ehdot $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} > \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}$ ja $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} > 0$ ovat voimassa, niin systeemi (8.1) on globaalisti epästabiili.*

Huomautus: Kappaleessa 8.2 kuvattu graafinen analyysi ei aina anna mahdollisuutta selvittää, onko systeemi globaalisti stabiili vai globaalisti epästabiili. Tällöin pitää tutkia onko $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y}$ negatiivinen (= stabiili) vai positiivinen (= epästabiili) pisteessä $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

8.4 Esimerkkejä

Esim. 1. Olkoon $\dot{x} = f(x, y)$ ja $\dot{y} = g(x, y)$. Oletetaan, että

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = f_x < 0 & (\dot{x} = f(\underset{-}{x}, y)) \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = f_y < 0 & (\dot{x} = f(x, \underset{-}{y})) \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} = g_y > 0 & (\dot{y} = g(x, \underset{+}{y})) \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} = g_x < 0 & (\dot{x} = f(\underset{-}{x}, y)). \end{cases}$$

Matemaattinen tarkastelu: käytetään hyväksi tulosta 2. Edeltä saadaan

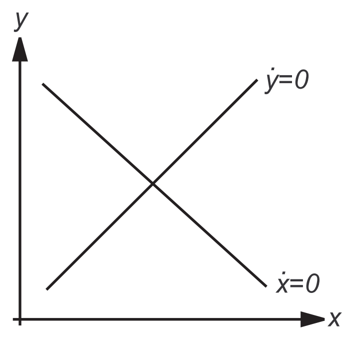
$$\underbrace{\underset{-}{\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}} \underset{+}{\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}}}_{-} < \underbrace{\underset{-}{\frac{\partial \dot{x}}{\partial y}} \underset{-}{\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}}}_{+}.$$

Tämä pätee jos ja vain jos systeemillä on satulapisteratkaisu.
Graafinen tarkastelu: singulaariurien kulmakertoimet ovat

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{x}=0} = -\frac{f_x}{f_y} < 0 \quad \Rightarrow \quad (\dot{x} = 0 \text{ laskeva})$$

ja

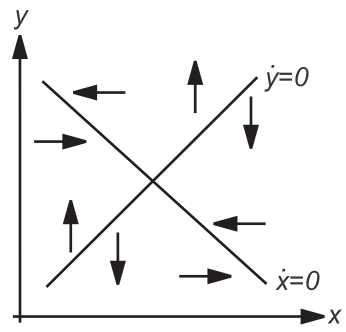
$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{y}=0} = -\frac{g_x}{g_y} > 0 \quad \Rightarrow \quad (\dot{y} = 0 \text{ nouseva.})$$



Kuva 8.16.

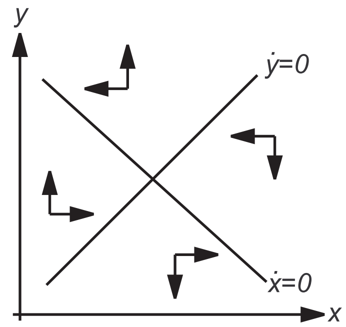
Etsitään suuntanuolet:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} < 0 \quad \Rightarrow \quad x \text{ liikkuu uraa } (\dot{x} = 0) \text{ kohti (sääntö 1).}$$
$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} > 0 \quad \Rightarrow \quad y \text{ liikkuu urasta } (\dot{y} = 0) \text{ poispäin (sääntö 2).}$$



Kuva 8.17.

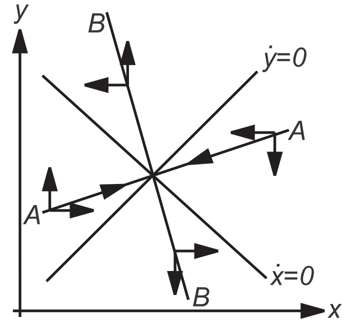
Suuntanuolien avulla voidaan piirtää seuraavanlainen kuva:



Kuva 8.18.

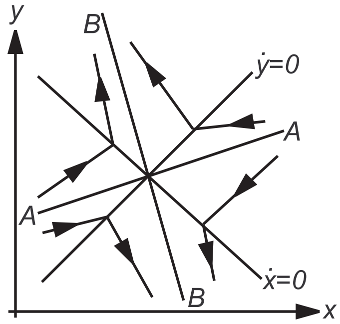
Huom! kuvassa kaikki urat nuolten välillä ovat mahdollisia.

Suuntanuolten perusteella havaitaan, että systeemillä on satulapisteratkaisu:



Kuva 8.19.

Myöskin epästabiilit urat saadaan suuntanuolten avulla:



Kuva 8.20.

Esim. 2. Olkoon

$$\begin{cases} \dot{x} = f(\underset{-}{x}, \underset{+}{y}) \\ \dot{y} = g(\underset{-}{x}, \underset{-}{y}). \end{cases}$$

Matemaattinen tarkastelu:

$$\underbrace{\underset{-}{\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}} \underset{-}{\frac{\partial \dot{y}}{\partial y}}}_{+} > \underbrace{\underset{+}{\frac{\partial \dot{x}}{\partial y}} \underset{-}{\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}}}_{-}.$$

Tästä seuraa, että systeemillä ei ole satulapisteratkaisua (tulos 2). Koska nyt

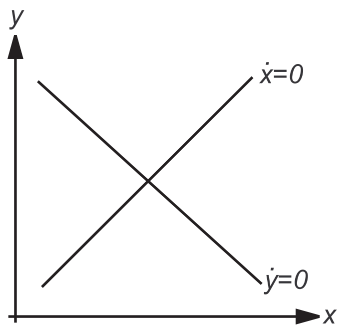
$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} < 0,$$

on systeemi globaalisti stabiili (tulos 2).
Graafinen tarkastelu: singulaarien kulmakertoimet saadaan laskemalla

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{x}=0} = -\frac{\overset{-}{f_x}}{\underset{+}{f_y}} > 0 \quad \Rightarrow \quad (\dot{x} = 0 \text{ nouseva})$$

ja

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{y}=0} = -\frac{g_x}{g_y} < 0 \quad \Rightarrow \quad (\dot{y} = 0 \text{ laskeva.})$$

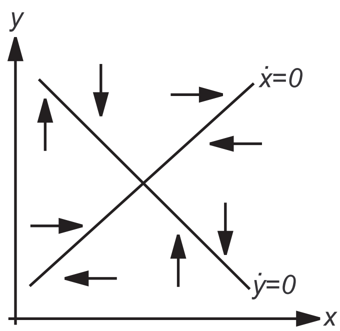


Kuva 8.21.

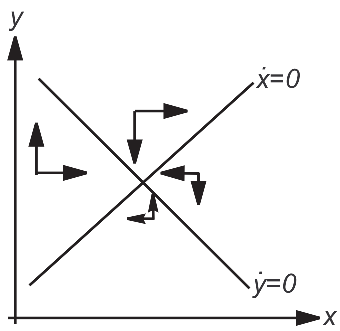
Suuntanuolet saadaan jälleen seuraavasta tarkastelusta:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} < 0 \quad \Rightarrow \quad x \text{ liikkuu uraa } (\dot{x} = 0) \text{ kohti.}$$
$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} < 0 \quad \Rightarrow \quad y \text{ liikkuu uraa } (\dot{y} = 0) \text{ kohti.}$$

Piirretään suuntanuolet:

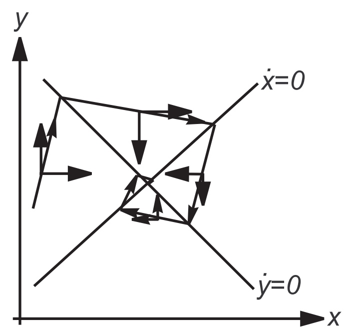


Kuva 8.22.



Kuva 8.23.

Suuntanuolten perusteella havaitaan että systeemi on globaalisti stabiili:



Kuva 8.24.

Esim. 3. Olkoon

$$\begin{cases} \dot{x} = f(\underset{+}{x}, \underset{+}{y}) \\ \dot{y} = g(\underset{+}{x}, \underset{+}{y}). \end{cases}$$

Matemaattinen tarkastelu: Koska

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \gtrless \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial x},$$

ei tiedetä onko systeemillä olemassa satulapisteratkaisua vai ei. Edelleen, koska

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} > 0$$

on systeemi joko globaalisti epästabiili tai sillä on olemassa satulapisteratkaisu. Jos nyt

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} < \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial x},$$

on systeemillä satulapisteratkaisu. Jos taas

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} > \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial x},$$

on systeemi globaalisti epästabiili.
Graafinen tarkastelu: Singulaariurien kulmakertoimet saadaan laskemalla

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{x}=0} = -\frac{\overset{-}{f_x}}{\underset{+}{f_y}} < 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{, siispä } \dot{x} = 0 \text{ laskeva})$$

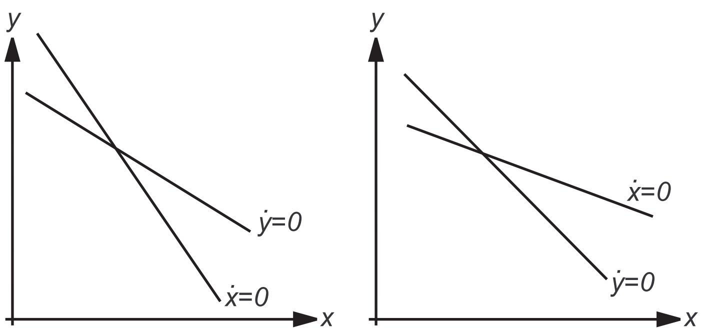
ja

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{y}=0} = -\frac{g_x}{g_y} < 0 \quad \Rightarrow \quad (\dot{y} = 0 \text{ laskeva.})$$

Etsitään suuntanuolet:

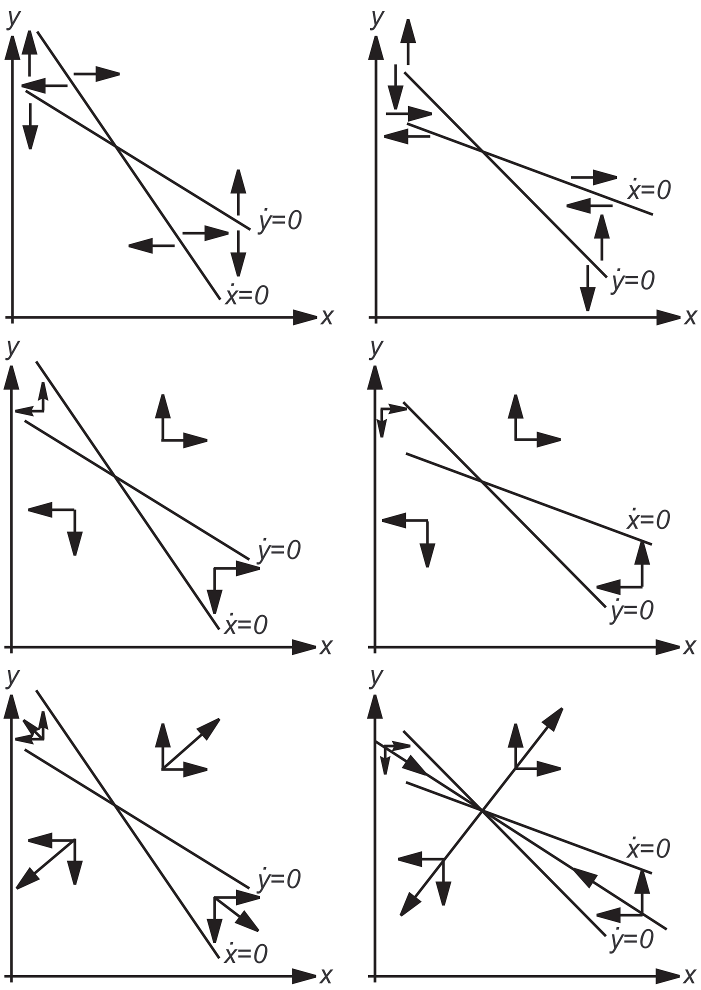
$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} > 0 \quad \Rightarrow \quad x \text{ etääntyy urasta } (\dot{x} = 0)\text{. Lisäksi, koska}$$
$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} > 0 \quad \Rightarrow \quad y \text{ etääntyy urasta } (\dot{y} = 0)\text{.}$$

koska molemmat singulaariurat ovat laskevia, saadaan kaksi tapausta riippuen siitä, kumpi ura laskee jyrkemmin:



Kuva 8.25.

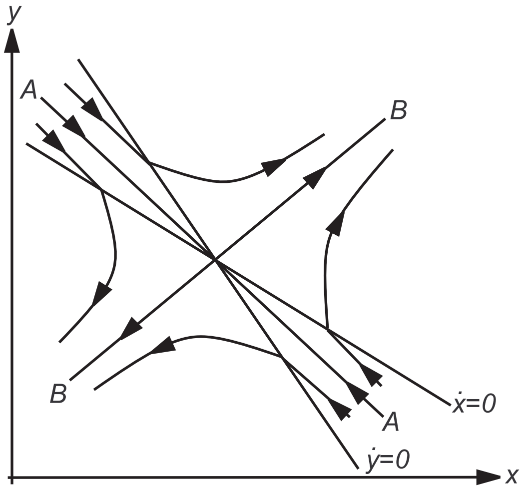
Piirretään edelleen:



Kuva 8.26.

Kuvasta 8.26 huomataan, että systeemi, jossa $\dot{x} = 0$ laskee jyrkemmin (vasemmanpuoleiset kuvat) on globaalisti epästabiili. Systeemillä, jossa $\dot{y} = 0$ laskee jyrkemmin (oikeanpuoleiset kuvat) on olemassa satulapisteratkaisu.

Oikeanpuoleisesta systeemistä voidaan piirtää epästabiilit urat:



Kuva 8.27.

Tarkastellaan edelliset systeemit vielä matemaattisesti. Aloitetaan tapauksesta, jossa $\dot{x} = 0$ laskee jyrkemmin. Nyt

$$-\frac{f_x}{f_y} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{x}=0} \quad < \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{y}=0} = -\frac{g_x}{g_y}.$$

Edellinen pätee jos ja vain jos

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad -f_x g_y < -f_y g_x \\ &\Leftrightarrow \quad f_x g_y < f_y g_x \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} > \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Tämä pätee jos ja vain jos systeemi on globaalisti epästabiili. Tulos todistaa oikeaksi kuvista tehdyn päätelmän.

Tarkastellaan edelleen tapausta, jossa $\dot{y} = 0$ laskee jyrkemmin. Nyt

$$-\frac{f_x}{f_y} = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{x}=0} \quad > \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\dot{y}=0} = -\frac{g_x}{g_y}.$$

Tämä pätee jos ja vain jos

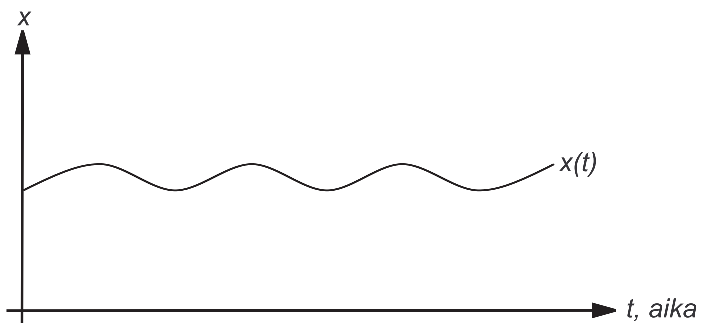
$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\frac{\partial \dot{y}}{\partial y} < \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial x}.$$

Siispä systeemillä on olemassa satulapisteratkaisu.

8.5 Vaihediagramma-analyysin käyttö taloudellisissa malleissa

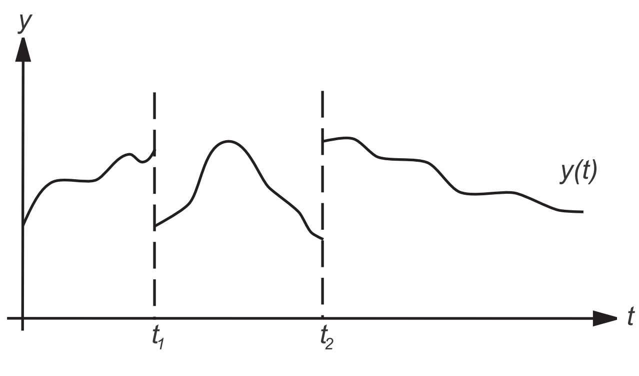
Määrittelemme nyt kaksi differentiaaliyhtälön muuttujatyyppiä. *Ennaltamäärätty muuttuja (predetermined variable)* on sellainen muuttuja, jonka kehitys on ajan suhteen *aina* jatkuvaa. *Ennaltamääräämätön muuttuja (non-predetermined variable)* on sellainen muuttuja, jonka kehitys on *seuraavaa poikkeusta lukuunottamatta* jatkuvaa: silloin (ja vain silloin) kun jokin mallin parametreista muuttuu, ennaltamääräämätön muuttuja voi tehdä epäjatkuvan hyppäyksen. Tämän ominaisuuden perusteella ennaltamääräämätöntä muuttujaa sanotaan myös *hyppymuuttujaksi (jump variable)*.

Ennaltamäärätyn muuttujan aikauraa voidaan kuvata seuraavalla tavalla:



Kuva 8.28.

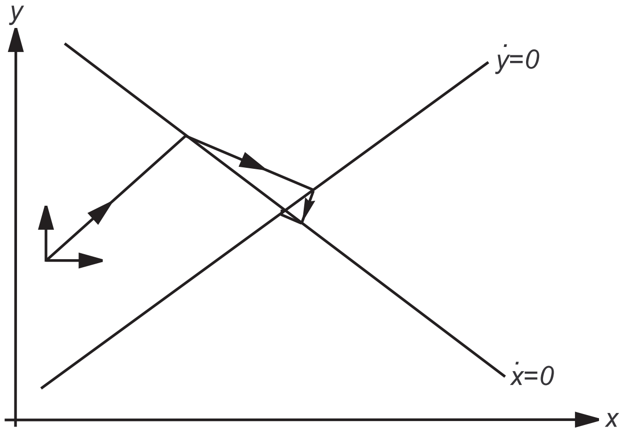
Sensijaan hyppymuuttuja voi tehdä hyppäyksen aina, kun malliin tulee eksogeeninen muutos (eli yksi tai useampi parametreista muuttuu):



Kuva 8.29.

hetkillä t_1 ja t_2 jokin mallin parametreista muuttui. Muulloin kuin hetkinä t_1 ja t_2 parametrien arvoissa ei ole muutoksia, joten hyppymuuttuja y on silloin jatkuva ajan suhteen.

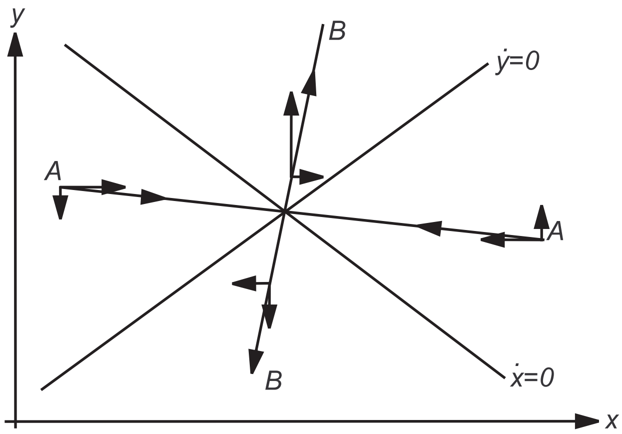
Jos sellaisessa mallissa jota aiotaan käyttää taloudellisen ilmiön ennustamiseen molemmat muuttujat ovat ennaltamäärättyjä, pyritään globaalisesti stabiiliin ratkaisuun:



Kuva 8.30.

Tämä sen vuoksi, että eksogeeninen muutos aiheuttaa mallin tasapainon siirtymisen uuteen paikkaan. Jotta uuteen tasapainoon päästäisiin, mallin täytyy on globaalisti stabiili. Mikäli malli globaalisti epästabiili, sillä ei voi mitään ennustaa: pienikin muutos aiheuttaisi systeemin hajoamisen.

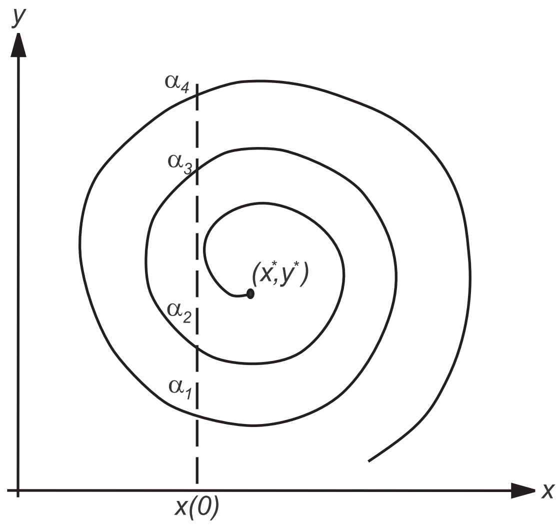
Jos sellaisessa mallissa jota aiotaan käyttää taloudellisen ilmiön ennustamiseen, toinen muuttuja (tai osa muuttujista, jos näitä on yli 2) ovat ennaltamäärättyjä ja toinen (tai loput muuttujista) on ennaltamääräämätön, pyritään satulapisteratkaisuun:



Kuva 8.31: jos sopeutuminen alkaa muualta kuin satulapisteuralta AA, lähenee systeemi kohti pakouraa BB.

Tämä niinikään sen vuoksi, että parametrin muutos siirtää systeemin tasapainoa ja samalla myös tasapainoon johtavaa sopeutumisuraa. Jos mallissa on satulapisteratkaisu, niin uusikin kehitysura on yksikäsitteinen, joten sitä voidaan käyttää ennustamiseen. Tätä voidaan selventää seuraavalla kahdella kuviolla.

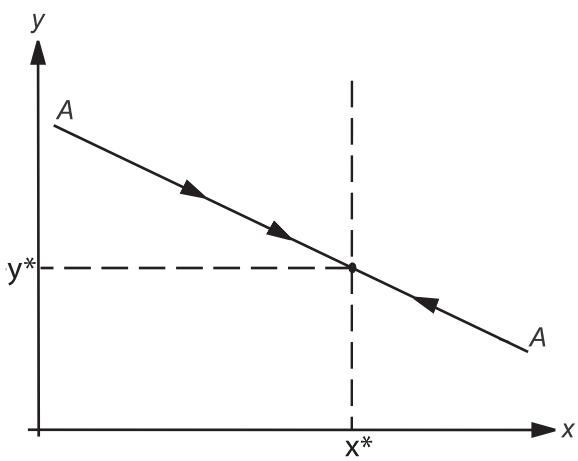
Tarkastellaan ensiksi globaalisti stabiilia ratkaisua:



Kuva 8.32.

Olkoon $x(0)$ ennaltamäärätyn muuttujan x alkuarvo. Mille tasolle hyppymuuttuja y hyppää, jos alkutilanteessa $t = 0$ jokin parametreista muuttuu? Mahdollisia y:n $x(0)$:aa vastaavia alkuarvoja, joista päästään tasapainoon (x^*, y^*), on periaatteessa ääretön määrä (kuviossa α_0, α_1, α_2 jne.). Ts. y voi hypätä äärettömän monelle tasolle ja silti systeemi voi 'spiraalia' myöten edetä tasapainoon (x^*, y^*). Siis aivan ilmeisesti tällaista mallia ei voida käyttää minkäänlaisen kehityksen ennustamiseen.

Oletetaan nyt satulapisteratkaisu:



Kuva 8.33.

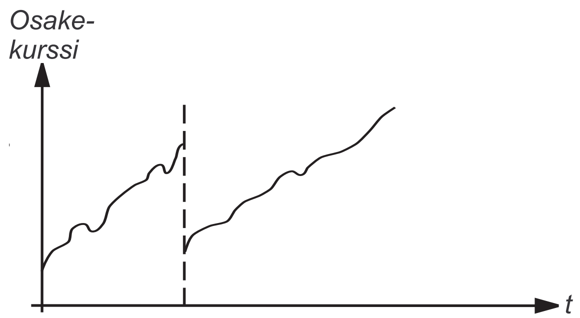
Satulapisteuralta AA löytyy vain yksi sellainen y:n alkuarvo $y(0)$, josta systeemi voi edetä tasapainoon (x^*, y^*). Muilla y:n alkuarvoilla tasaapainoon ei päästä. Täten mallin kehitysura on yksikäsitteinen, joten sen avulla voidaan ennustaa systeemin kehitystä. (*Huom!* ennaltamäärätyn muuttujan alkuarvo on aina annettu.)

Esimerkkejä dynaamisten taloudellisten mallien muuttujista:

(i) Pääomakanta on selvästi ennaltamäärätty muuttuja. Se ei voi hypätä, jos mallin jokin parametri (esim. korko) muuttuisi, vaan se on kehittynyt ja kehittyy edelleen menneen investointikehityksen kasaumana. $\dot{K} = I$, sillä $K(t) = \int_{-\infty}^{t} I(\tau)d\tau$.

(ii) Maan ulkoinen varallisuus on yleensä ennaltämäärätty muuttuja: se kertyy (kuluu) maksutaseen ylijäämän (alijäämän) kautta ja on siten jatkuva yli ajan. Sen sijaan valuuttavaranto ei liene ennaltamäärätty: esim. spekulaattorit voivat vaihtaa valuuttaa toiseksi valuutaksi ja arvopapereiksi hyvinkin lyhyellä varoitusajalla, kun jokin taloudellisista indikaattoreista muuttuu.

(iii) Osakkeen hinta on hyppymuuttuja: se kehittyy jatkuvasti yli ajan niin kauan kun sijoittajat eivät näe yrityksen kehityksessä mitään uutta ja yllättävää. Yllättävän tiedon sattuessa osakkeen kurssi hyppää.



Kuva 8.34.

(iv) Liukuva vaihtokurssi on hyppymuuttuja. Jos sijoittajien mielestä maan kehityksessä ei tapahdu mitään sellaista, mitä ei aikaisemmin voinut ennakoida, kurssi kehittyy vakaasti ja jatkuvasti yli ajan. Uusi ja yllättävä tieto maan tilasta panee sijoittajat reagoimaan, mikä saa kurssin hyppäämään.

9 Sovellus: investointifunktion johtaminen

9.1 Taustaa

Monissa makromalleissa on ollut vaikeuksia muodostaa vakaata investointifunktiota. Syynä tähän on ollut se, että yritys on oletettu kaikilla markkinoilla hinnanottajaksi, jolloin saadaan kyllä haluttu pääomakannan taso, mutta ei haluttua tasoa investoinneille eli pääomakannan muutokselle.

Tarkastelemme tätä ongelmaa seuraavan esimerkin avulla. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että yrityksellä ei ole muita panoksia kuin pääoma. Yleistys, jossa pääoman lisäksi on myös työ ja mahdollisesti muita panoksia, on helppo tehdä. Tuotanto y on pääomakannan k konkaavi funktio eli pääoman rajatuotos on aleneva:

$$y = f(k), \qquad f' > 0, \quad f'' < 0. \tag{9.1}$$

Oletetaan lisäksi, että yritys ottaa sekä lopputuotteensa hinnan p, investointitavaroidensa (=uusien koneidensa) hinnan q sekä pääoman käyvän koron r annettuna, ja että vakio-osuus μ pääomasta kuluu aikayksikössä. Tällöin se maksimoi voittoa

$$\Pi = py - rk - \mu k = pf(k) - (r + \mu)qk, \tag{9.2}$$

missä py on myyntitulot, r korkokustannukset pääomasta, qk pääoman käypä arvo ja μqk kuluneen pääomakannan korvaaminen (= poistot). Yrityksen voitonmaksimointiehdoksi tulee

$$\frac{\partial \Pi}{\partial k} = pf'(k) - (r + \mu)q = 0,$$

jonka perusteella yritykselle optimaalinen pääomakanta k^* saadaan seuraavasta ehdosta: pääoman rajatuoton $pf'(k^*)$ on oltava yhtäsuuri kuin korko r plus poistoaste μ kerrottuna investointitavaroiden suhteellisella hinnalla $\frac{q}{p}$:

$$f'(k^*) = (r + \mu)\frac{q}{p}, \tag{9.3}$$

missä k^* on optimaalinen eli haluttu pääomakanta.

Ongelmana on, että ehto (9.3) määrittelee pääomakannan k tason mutta ei investointeja hintojen (p, q) sekä koron r funktiona:

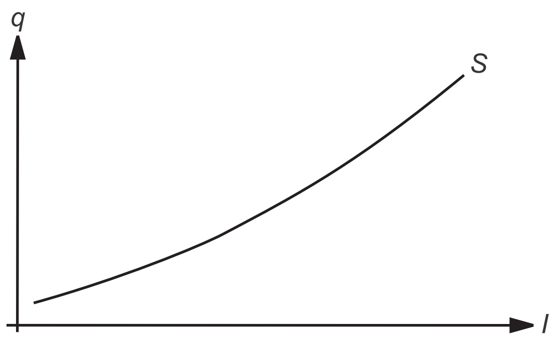
$$k^*(p, q, r) = (f')^{-1}\Big((r + \mu)\frac{q}{p}\Big), \quad \text{missä } (f')^{-1} \text{ on funktion } f' \text{ käänteisfunktio.}$$

Näin siitä huolimatta, että makromallit ja empiirinen evidenssi edellyttäisivät funktiota, jossa investointien taso (eli pääomakannan muutos) olisi hintojen (p, q) ja koron r funktio.

9.2 Epätäydelliset investointitavaramarkkinat

Ratkaisu em. ongelmaan on yksinkertainen: yksittäinen yritys ei kohtaakaan täydellisiä, vaan epätäydelliset investointitavaramarkkinat. Investointihyödykkeet eivät ole homogeenisia, kuten monet makromallit yksinkertaisuuden vuoksi olettavat. Ne koostuvat kullekin yritykselle hyvinkin erityisistä palveluista ja tavaratoimituksista, joten ne ovat itseasiassa hyvin heterogeenisia hyödykkeitä. Oletamme yksikertaisuuden vuoksi, että investointitavaroiden tuottajat käyttävät yrityksen tuottamaa hyödykettä panoksena. Tällöin yrityksen kohtaama investointitavaroiden tarjonta I on investointitavaroiden ja lopputuotteen suhteellisen hinnan $Q \equiv \frac{q}{p}$ kasvava funktio:

$$I = g'(Q) = g(\frac{q}{p}), \qquad g' > 0. \tag{9.4}$$



Kuva 9.1.

Toisin sanoen, yritys kohtaa investointitavaramarkkinoilla nousevan tarjontakäyrän: mitä korkeampi on investointien jo olemassa oleva taso I, sitä enemmän uusista koneista ja laitteista joutuu maksamaan suhteessa omaan lopputuotteeseen.

Investoinnit I koostuvat vanhan pääoman kulumisen korvaamisesta μk plus uuden pääoman luomisesta $\dot{k} = \frac{dk}{dt}$, missä t on aika. Tästä ja (9.4):sta saadaan tasapainoehto

$$\mu k + \dot{k} = I = g(Q),$$

josta ratkaistaan pääoman kasautumisen yhtälö:

$$\dot{k} = g(Q) - \mu k, \qquad g' > 0. \tag{9.5}$$

Pääoman rajatuotto lopputuotteena on $f'(k)$. Jos tämä kerrotaan lopputuotteen hinnalla p, saadaan pääoman rajatuotto rahana $pf'(k)$. Yritykselle on kuitenkin tärkeä tietää vielä lisäpääoman rajatuotto pääomayksikköinä, joka saadaan jakamalla rahamäärä $pf'(k)$ uuden pääomayksikön hinnalla q. Yritys lisää (tai vähentää) investointejaan, kunnes saavutaan tasolle jossa lisäpääoman rajatuotto pääomayksiköinä $\frac{p}{q}f'(k)$ plus inflaatiovoitto reaalipääomasta (=pääomatavaroiden hinnan suhteellinen muutos) $\frac{\dot{q}}{q} = \frac{1}{q}\frac{dq}{dt}$ on yhtä suuri kuin pääoman kuluminen μ plus käypä korko pääomalle r. Jos $\frac{p}{q}f'(k) + \frac{\dot{q}}{q} > \mu + r$, niin silloin yrityksen kannattaa lisätä investointejaan, ja jos $\frac{p}{q}f'(k) + \frac{\dot{q}}{q} < \mu + r$, vähentää niitä. Näin ollen olemme saaneet tasapainoehdon

$$\frac{p}{q}f'(k) + \frac{\dot{q}}{q} = \mu + r. \tag{9.6}$$

Määritelmän $Q = \frac{q}{p}$ perusteella sekä ottaen huomioon, että lopputuotehinta p on eksogeeninen (ts. $\dot{p} = 0$), ehto (9.6) voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$\dot{Q} = \frac{\dot{q}}{p} = (r + \mu)\frac{q}{p} - f'(k) = (r + \mu)Q - f'(k). \tag{9.7}$$

Tässä yrityksen tasapainoehto (9.7) on johdettu intuitiivisesti. Se voidaan myös johtaa suoraan yrityksen voitonmaksimoinnista dynaamisen optimoinnin avulla, mikä on kuitenkin liian vaativa asia tälle kurssille.

9.3 Yrityksen dynamiikka

Differentiaaliyhtälöt (9.5) ja (9.7) määrittelevät mallin dynamiikan. Pääomakanta k on aivan ilmeisesti ennaltamäärätty muuttuja. Investointitavaroiden suhteellinen hinta Q on hyppymuuttuja: jos investointitavaroiden myyjillä on rationaaliset odotukset, ne voivat sopeuttaa omaa myyntihintaansa heti, kun jotain uutta ja yllättävää ilmenee.

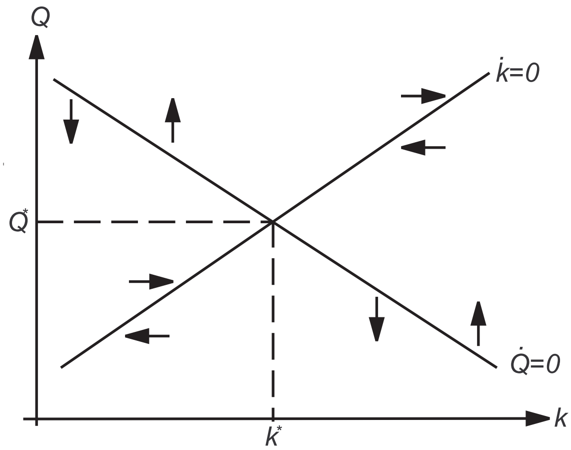
Yhtälöistä (9.1, (9.5 ja (9.7) saadaan

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = -\mu < 0, \quad \frac{\partial \dot{k}}{\partial Q} = g' > 0, \quad \frac{\partial \dot{Q}}{\partial k} = -f'' > 0, \quad \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} = r + \mu > 0.$$

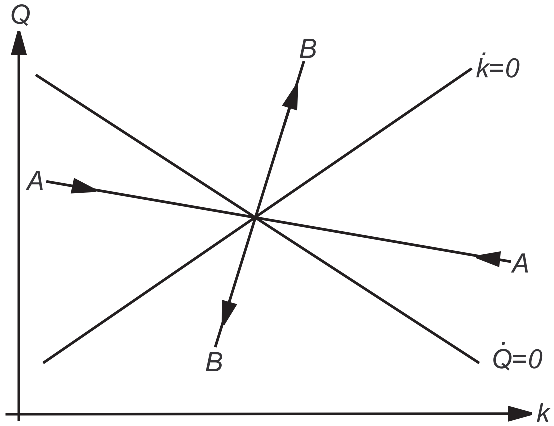
Näin ollen (k, Q) tasossa käyrä $(\dot{k} = 0)$ on nouseva ja käyrä $(\dot{Q} = 0)$ on laskeva:

$$\left.\frac{dQ}{dk}\right|_{\dot{k}=0} = -\frac{\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}}{\frac{\partial \dot{k}}{\partial Q}} = \frac{\mu}{g'} > 0, \qquad \left.\frac{dQ}{dk}\right|_{\dot{Q}=0} = -\frac{\frac{\partial \dot{Q}}{\partial k}}{\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q}} = \frac{f''}{r + \mu} < 0.$$

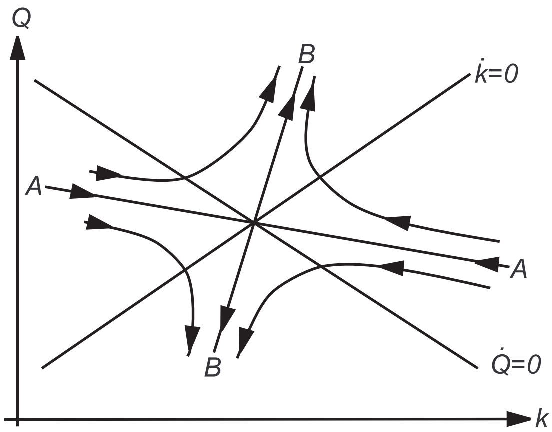
Edelleen muuttuja k sopeutuu kohden käyrää $(\dot{k} = 0)$ ja muuttuja Q poispäin käyrästä $(\dot{Q} = 0)$: $\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} < 0$ ja $\frac{\partial \dot{Q}}{\partial k} > 0$. Tästä saadaan seuraava grafiikka:



Kuva 9.2: suuntanuolet.



Kuva 9.3: satulapisteratkaisu.



Kuva 9.4: sopeutumisurat.

missä (k^*, Q^*) on (pitkän aikavälin) tasapaino, AA satulapisteura ja BB pakoura. Havaitaan, että on olemassa satulapisteratkaisu. Mallin satulapisteominaisuus on saatavissa myös suoraan seuraavasta tuloksesta:

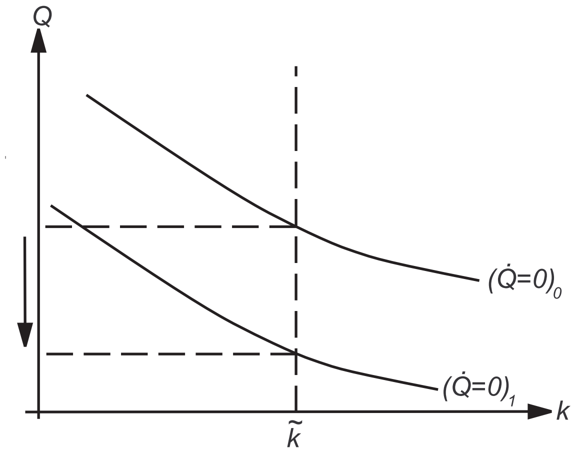
$$\underbrace{\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}}_{-}\underbrace{\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q}}_{+} < \underbrace{\frac{\partial \dot{k}}{\partial Q}}_{+}\underbrace{\frac{\partial \dot{Q}}{\partial k}}_{+}.$$

9.4 Investointifunktio

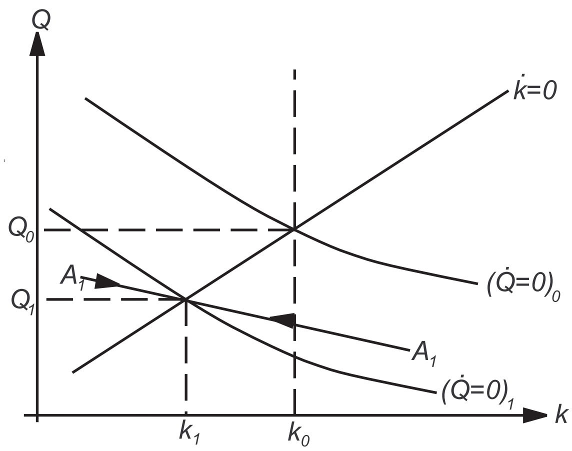
Tutkimme nyt, mitä tapahtuu kun korko r yhtäkkiä muuttuu hetkellä $t = 0$. Koska yhtälöistä (9.1), (9.5) ja (9.7) saadaan

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \dot{Q}}{\partial r} = Q > 0, \quad \frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q} = r + \mu > 0, \quad \frac{dQ}{dr} = -\frac{\frac{\partial \dot{Q}}{\partial r}}{\frac{\partial \dot{Q}}{\partial Q}} < 0 \quad \text{kun } \dot{Q} = 0 \text{ ja } k \text{ vakio.}$$

käyrä ($\dot{k} = 0$) pysyy paikallaan, mutta käyrä ($\dot{Q} = 0$) siirtyy alaspäin, kun korko r kasvaa. $(\dot{Q} = 0)_0 \rightarrow (\dot{Q} = 0)_1$:

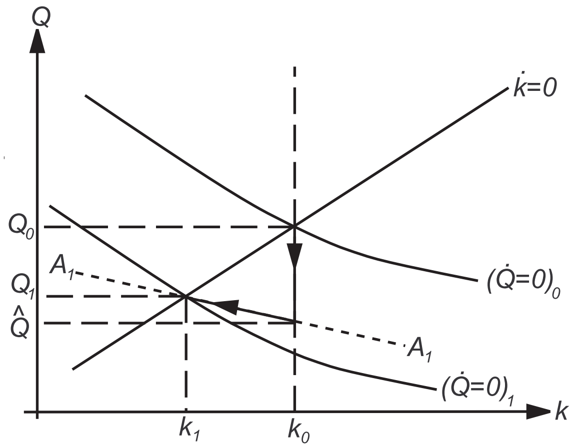


Kuva 9.5.



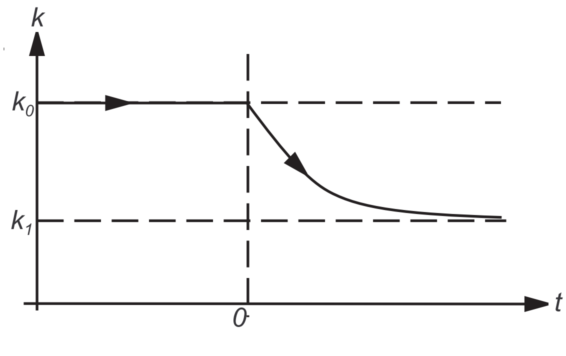
Kuva 9.6.

Koska käyrä ($\dot{k} = 0$) pysyy paikallaan, tasapaino siirtyy alkutasapainosta (k_0, q_0) uuteen tasapainoon (k_1, Q_1); ainut uutta tasapainoa vastaava satulapisteura on A_1A_1.

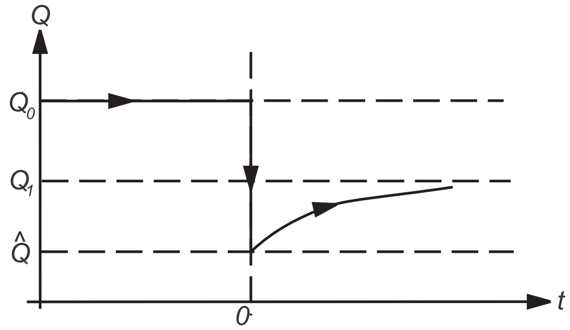


Kuva 9.7.

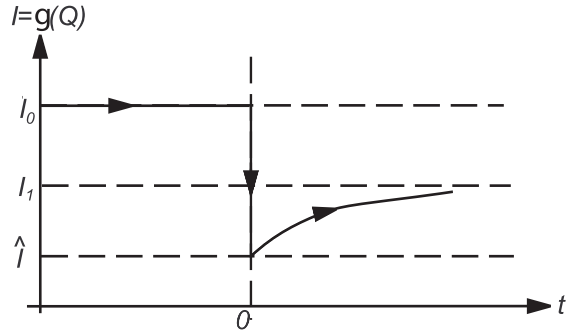
Kuvassa 8.7 on nuolilla kuvattu sopeutumisura. Piirretään muuttujien k, Q ja $I = g(Q)$ aikaurat. Kuvissa hetki $t = 0$ on muutosajankohta, tässä tapauksessa siis koronnousun ajankohta.



Kuva 9.8: pääomakannan kehitys



Kuva 9.9: investointitavaroiden suhteellisen hinnan kehitys



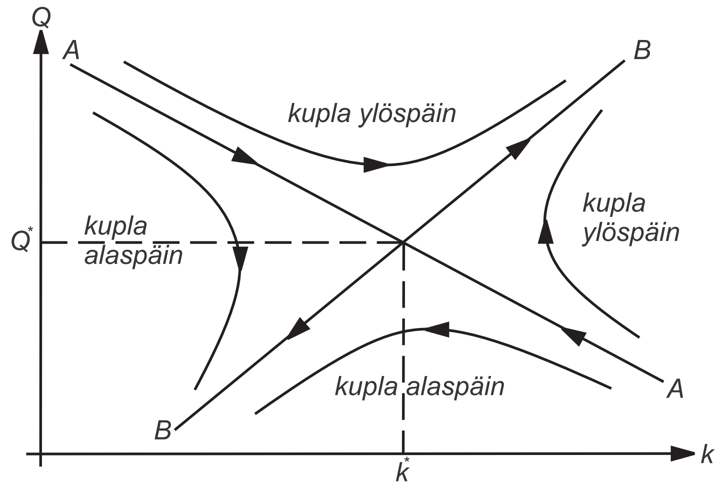
Kuva 9.10: investointien kehitys

Pääomakanta putoaa vähitellen ja tasaisesti uudelle tasapainotasolleen k_1. Sen sijaan investointitavaroiden suhteellinen hinta $Q = \frac{q}{p}$ putoaa ensiksi tasolle $\hat{Q}$ ja sitten nousee vähitellen uudelle tasapainotasolleen Q_1 Samoin investoinnit I putoavat ensiksi tasolle $\hat{I}$ ja sitten nousevat vähitellen uudelle tasapainotasolleen I_1.

Tulos: Investoinnit ovat koron aleneva funktio: $I(r)$, $I' < 0$. Kun korko r nousee yllättäen, investointien lyhyen aikavälin muutos yliampuu pitkän aikavälin muutoksen: $|\hat{I} - I_0| > |I_1 - I_0|$. Ts. investointien korkojousto on lyhyellä aikavälillä suurempi kuin pitkällä aikavälillä.

9.5 Epästabiilien urien tulkinta

Epästabiili ura, joka lähenee asymptoottisesti kohden pakouraa BB, on *kupla*.



Kuva 9.11.

Jos yritys on epästabiililla uralla, investointitavaroiden hinta Q ja samalla investointien taso $I = g(Q)$ joko kasvavat rajatta (kupla ylöspäin) tai laskevat rajatta (kupla alaspäin), kunnes jokin mallin ulkopuolinen institutionaalinen rajoite katkaiseen tämän kehityksen. Niin kauan kuin yritys ja investointitavaroiden tuottajat luottavat vakaaseen kehitykseen, kehitys myös pysyy vakaana ja ollaan satulapisteuralla AA. Mikä tahansa häiriö joka saa nämä agentit menettämään uskonsa vakaaseen kehitykseen, voi sysätä kehityksen joko ylöspäin tai alaspäin suuntautuvalle kuplalle. Tämän tulkinta on seuraava:

$$\text{kupla ylöspäin:}\qquad \begin{cases} \text{Investointitavaroiden suht. hinta } Q \text{ nousee} \\ \Longrightarrow \text{Yritys odottaa hinnan } Q \text{ nousevan myös jatkossa} \\ \qquad \text{ja aikaistaa investointejaan} \\ \Longrightarrow \text{investointitavaroiden kysyntä kasvaa} \\ \Longrightarrow \text{investointitavaroiden suht. hinta nousee edelleen} \\ \qquad \text{jne.} \end{cases}$$

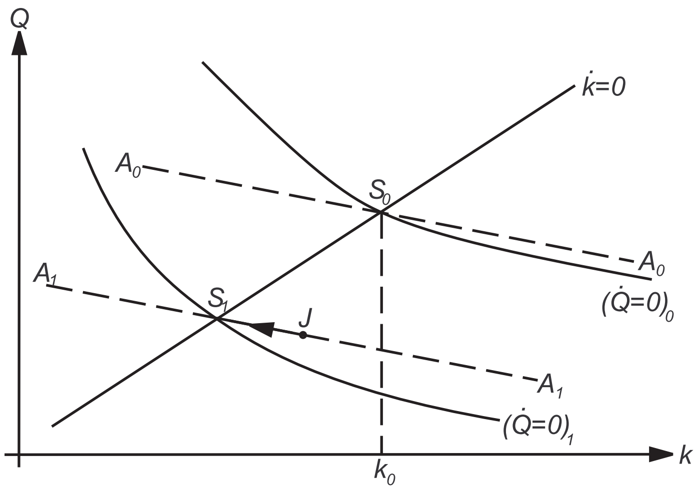
$$\text{kupla alaspäin:}\qquad \begin{cases} \text{Investointitavaroiden suht. hinta } Q \text{ laskee} \\ \Longrightarrow \text{Yritys odottaa hinnan } Q \text{ laskevan myös jatkossa ja} \\ \qquad \text{myöhentää investointejaan} \\ \Longrightarrow \text{investointitavaroiden kysyntä supistuu} \\ \Longrightarrow \text{investointitavaroiden suht. hinta laskee edelleen} \\ \qquad \text{jne.} \end{cases}$$

9.6 Odotusten vaikutus investointeihin

Oletetaan nyt, että yritys odottaa koron r nousevan tulevaisuudessa hetkellä T. Esim. hetkellä $t = 0$ sattuu jotain sellaista, joka saa yrityksen uskomaan että keskuspankki kiristää rahamarkkinoita hetkellä T. Koron nousu siirtää käyrää

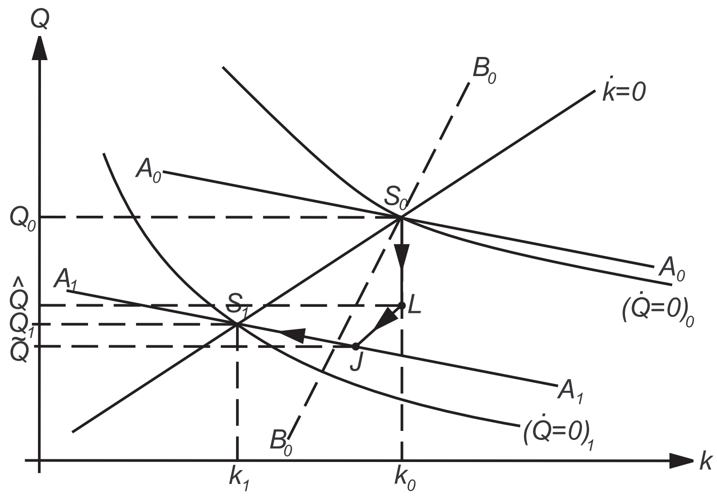
$(\dot{Q} = 0)$ alaspäin $(\dot{Q} = 0)_0 \rightarrow (\dot{Q} = 0)_1$, mutta vasta hetkellä T. Ongelman ratkaisu on, että yritys etenee aikavälin $(0, T)$ jotain (alkuperäistä tasapainoa S_0 vastaavaa) epästabiilia uraa ja siirtyy sitten satulapisteuralle A_1A_1 täsmälleen hetkellä T. Loppuaika edetään uuteen tasapainoon satulapisteuraa pitkin.

Piirretään nyt ratkaisu takaperin. Kun $t \geq t_1$, yritys etenee uutta tasapainoa (k_1, Q_1) vastaavaa satulapisteuraa A_1A_1 välin JS_1:



Kuva 9.12.

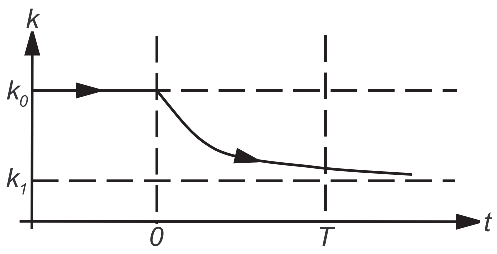
Nyt on enää löydettävä se epästabiili ura joka vastaa alkuperäistä tasapainoa S_0 ja joka saavuttaa pisteen J täsmälleen hetkellä T. Pisteeseen S_0 vievän satulapisteuran yläpuolella epästabiilit urat kääntyvät ylöspäin ja alapuolella alaspäin (vrt. sivu 4). Näin ollen:



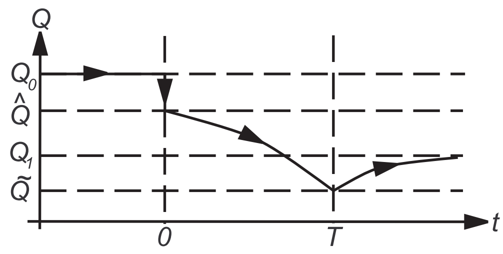
Kuva 9.13.

Tässä B_0B_0 on alkuperäistä tasapainoa S_0 vastaava pakoura. Suhteellinen hinta Q hyppää tasolle $\hat{Q}$ heti hetkellä $t = 0$, kun tieto tulevasta koron noususta on saatu, joten hypätään heti pisteestä S_0 pisteeseen L. Sitten edetään väli LJ epästabiilia uraa pitkin kunnes hetkellä T saavutetaan satulapisteura A_1A_1 pisteessä J. Loppuaika edetään uuteen tasapainoon satulapisteuraa A_1A_1 pitkin. Tuloksen tulkinta on seuraava. Sen jälkeen kun tieto tulevasta koron noususta on saatu, yrityksen investointihalukkuus pienenee. Tällöin myös investoinnit pienenevät ja investointitavaroiden myyjät joutuvat heti laskemaan hintaansa $Q_0 \to \hat{Q}$ ja $q_0 = pQ_0 \to \hat{q} = p\hat{Q}$. Kun korko sitten hetkellä t nousee, (yhtälön (9.7) nojalla) hinnan Q muutosnopeus $\dot{Q}$ mukautuu tähän muutokseen, mutta hinta itse ei tee enää mitään epäjatkuvaa hyppäystä.

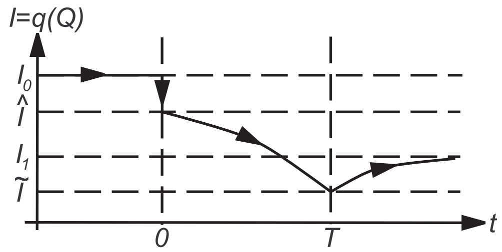
Muuttujien k, q ja I aikaurat ovat seuraavat:



Kuva 9.14.



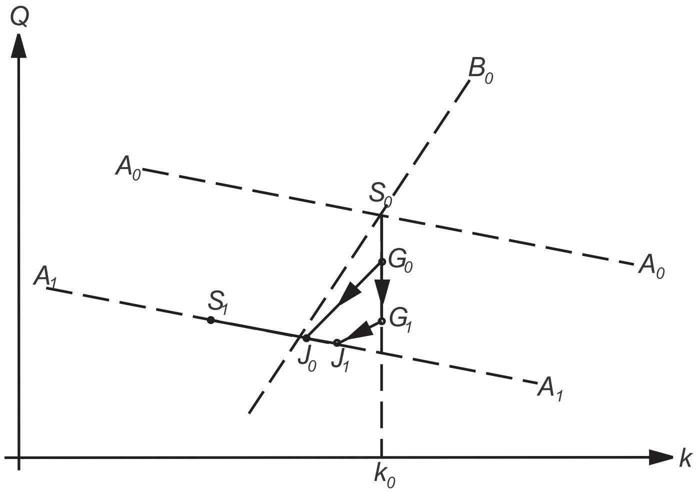
Kuva 9.15.



Kuva 9.16.

Tässä $t = 0$ on hetki, jolloin tieto koronnousustaa saadaan, $t = T$ hetki, jolloin korko todella nousee. Tästä havaitaan, että investointien sopeutuminen alkaa siitä hetkestä $t = 0$, jolloin tieto (tai usko) muutoksesta saadaan, ei siitä hetkestä, jolloin muutos todella tapahtuu. Näin ollen epävarmuus rahamarkkinoilla aiheuttaa epävakautta investoinneissa.

Huomautus. Pisteen $\hat{Q}$ ei tarvitse olla pisteen Q_1 yläpuolella, vaan se voi olla myös tämän alapuolella. Vertaillaan vielä sopeutumisuria kun tieto koronnoususta tulee eri aikoina. Piirretään kuva:



Kuva 9.17.

Kuvassa ura $S_0G_0J_0S_1$ vastaa tilannetta, jossa yritys saa tiedon koronnoususta ajanhetkenä T_0. Ura $S_0G_1J_1S_1$ vastaa tilannetta, jossa yritys saa koronnostotiedon ajanhetkenä T_1. Tässä tapauksessa $T_0 > T_1$.

10 Optimisäätöteorian perusteita

10.1 Johdanto

On olemassa kahden tyyppisiä dynaamisia malleja: *jatkuva-aikaisia*, jotka ilmaistaan differentiaaliyhtälöinä; ja *distreettiaikaisia*, jotka ilmaistaan differenssiyhtälöinä. Jotkut taloudelliset ongelmat on helpompi mallittaa jatkuva-aikaisina, ja jotkut toiset distreettiaikaisina. Jos saman mallin jatkuva-aikaisella ja diskreettiaikaisella muunnoksella on olemassa ratkaisut, niin ne johtavat periaatteessa samaan tulokseen.

Tämän luennon tarkoituksena on osoittaa, kuinka dynaamista mallia optimoidaan. Ajanpuutteen vuoksi tarkastelemme vain jatkuva-aikaisia malleja. Distreetit mallit on jätetty tämän luennon ulkopuolelle.

Optimisäätöteoriassa (= optimiohjausteoriassa, optimal control theory) on olemassa kaksi vaihtoehtoista lähestymistapaa.[1] *Dynaaminen ohjelmointi* (dynamic programming), jonka julkaisi amerikkalainen matemaatikko R. Bellman 1950-luvulla, ja *maksimiperiaate* (maximum principle), jonka julkaisi venäläinen matemaatikko L. Pontrjagin niinikään 1950-luvulla. Jotkut dynaamiset optimointiongelmat on helpompi ratkaista dynaamisen ohjelmoinnin avulla ja jotkut toiset maksimiperiaatteen avulla. Jos molemmilla lähestymistavoilla on olemassa samaan ongelmaan ratkaisu, niin ne periaatteessa johtavat samaan tulokseen. Tällä luennolla keskitymme maksimiperiaatteeseen. Dynaaminen ohjelmointi on jätetty tämän luennon ulkopuolelle.

10.2 Maksimiperiaate

Tarkastellaan suunnitteluperiodia $[\tau, T]$, missä τ on alkuhetki ja T loppuhetki. On myös mahdollista, että loppuhetki on ääretön, $T = \infty$. Olkoon $x_1, ..., x_n$ *tilamuuttujia* (state variables) ja $u_1, ..., u_m$ *säätömuuttujia* (control variables). Sekä säätö- että tilamuuttujat ovat ajan funktioita eli ne muuttuvat ajassa. Taloudellisissa sovelluksissa perussäätöongelmana on maksimoida *kohdefunktionaalia*

$$\int_{\tau}^{T} e^{-\rho t} U\big(x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)\big) dt \tag{10.1}$$

säätömuuttujien $u_1, ..., u_m$ avulla rajoiteena differentiaaliyhtälöt

$$\dot{x}_i(t) \doteq \frac{dx_i(t)}{dt} = F_i\big(x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)\big) \text{ for } i = 1, ..., n, \tag{10.2}$$

jotka kuvaavat tilamuuttujien $x_1, ..., x_n$ kehitystä. Tilamuuttujien alkuarvot $x_1(\tau), ..., x_n(\tau)$ ovat annetut.

Huom! Tässä luentosarjassa rajoitutaan vain tapaukseen, jossa kohdefunktionaalin diskonttoa $e^{-\rho t}$ lukuunottamatta sekä kohdefunktionaali (10.1) että liikeyhtälöt (10.2) ovat ajasta t riippumattomia. Tämä tapaus kattaa valtaosan kansantaloustieteellisistä sovelluksista.

[1]Ks. esim. A.K. Dixit (1979), tai Kamien and N.L. Schwarz (1985).

Dynaaminen optimointiongelma (10.1) and (10.2) voidaan ratkaista seuraavasti. Määritellään (reaaliarvoinen) *Hamiltonin functio*

$$\begin{aligned} H_t &= U\big(x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)\big) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) \frac{dx_i(t)}{dt} \\ &= U\big(x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t)\big) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) F\big(x_1(t), ..., x_n(t), u_1(t), ..., u_m(t), t\big), \end{aligned} \tag{10.3}$$

missä $\lambda_i(t)$ on tilamuuttujaa $x_i(t)$ vastaava *liittomuuttuja* (co-state variable). Liittomuuttujat kehittyvät seuraavan diferetiaaliyhtälön mukaan:

$$\dot{\lambda}_i(t) \doteq \frac{d\lambda_i(t)}{dt} = \rho\lambda_i(t) - \frac{\partial H_t}{\partial x_i(t)} \text{ ja } \lambda_i(T)x_i(T)e^{-rT} = 0 \text{ for } i = 1, ..., n. \tag{10.4}$$

Nyt dynaaminen optimointi voidaan muuntaa staattiseksi optimoinniksi, jossa Hamiltonin funktiota (10.3) maksimoidaan säätömuuttujien $u_1(t), ..., u_m(t)$ avulla joka hetki t. Mikäli funktiot U ja F_i ovat derivoituvia, tämä johtaa seuraaviin ensimmäisen asteen ehtoihin:

$$\frac{\partial H_t}{\partial u_i} = 0 \text{ for } i = 1, ..., n. \tag{10.5}$$

Dynaaminen optimointiongelmalla (10.1) and (10.2) on olemassa ratkaisu, jos löydetään liittomuuttujille $\lambda_i, ..., \lambda_n$ sellaiset alkuarvot $\lambda_i(\tau), ..., \lambda_n(\tau)$, että ehdot (10.4) ja (10.5) ovat samanaikaisesti voimassa.

10.3 Sovellus: voiton maksimointi yli ajan

Oletetaan, että yritys on kaikilla markkinoilla hinnanottaja ja valitaan yksikertaisuuden vuoksi lopputuotteen ja investointitavaroiden hinnat ykkösiksi. Yrityksellä on vain yksi tuotantopanos, pääoma K, ja alenevat skaalatuotot. Tällöin yrityksen tuotantofunktio tulee muotoon

$$Y = F(K), \quad F' > 0, \quad F'' < 0. \tag{10.6}$$

Pääoma K kasvaa bruttoinvestointien I avulla seuraavasti:

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt} = I - \mu K, \quad K(0) = K_0, \tag{10.7}$$

missä t on aika, $\mu > 0$ on poistot pääomasta and K_0 pääoman alkuperäinen määrä. Tämän lisäksi oletetaan, investointikustannusten I lisäksi yrityksellä on sopetumiskustannuksia

$$\phi(I), \quad \phi'' > 0, \quad \phi(0) = 0. \tag{10.8}$$

Yrityksen jakamat osingot ovat yhtä kuin myyntitulot Y minus investointkustannukset $I + \phi(I)$:

$$\Pi = Y - I - \phi(I) = F(K) - I - \phi(I).$$

Jos markkinakorko on r, niin yrityksen nykyarvoksi tulee

$$\int_0^\infty e^{-rt}\Pi dt = \int_0^\infty e^{-rt}[F(K) - I - \phi(I)]dt. \tag{10.9}$$

Yritys maksimoi nykyarvoaan (10.9) rajoitteena pääoman kasautuminen (10.7). Tästä saadaan Hamiltonin funktio

$$H = \Pi + \lambda\dot{K} = F(K) - I - \phi(I) + \lambda[I - \mu K], \tag{10.10}$$

missä λ on tilamuuttujaa K vastaava liittomuuttuja, joka kehittyy seuraavasti:

$$\dot{\lambda} = r\lambda - \frac{\partial H}{\partial K} = [r + \mu - F'(K)]\lambda, \quad \lim_{t\to\infty} \lambda K e^{-rt} = 0. \tag{10.11}$$

Investointien I avulla maksimoidaan Halmiltonin funktiota (10.10). Tästä 1. asteen ja 2. asteen ehdoiksi

$$\frac{\partial H}{\partial I} = \lambda - 1 - \phi'(I) = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial I^2} = -\phi'' < 0. \tag{10.12}$$

Derivoimalla yhtälö (10.12) ajan suhteen saadaan

$$\dot{\lambda} - \phi''(I)\dot{I} = 0.$$

Sijoittamalla tähän (10.11) ja (10.12) saadaan investointien kehitykseksi

$$\dot{I} = \frac{\dot{\lambda}}{\phi''(I)} = \frac{\lambda}{\phi''(I)}[r + \mu - F'(K)] = \frac{1 + \phi'(I)}{\phi''(I)}[r + \mu - F'(K)]. \tag{10.13}$$

Nyt meillä on (K, I)-tasossa kaksi differentiaaliyhtälöä, pääoman K kasautuminen (10.7) ja investointien I kehitys (10.13). Tässä systeemissä pääoma K ennaltamäärätty muuttuja ja investoinnit I hyppymuuttuja. Näillä kahdella differentiaaliyhtlölllä on seuraavat ominaisuudet:

$$\frac{\partial\dot{K}}{\partial K} = -\mu < 0, \quad \frac{\partial\dot{K}}{\partial I} = 1 > 0, \quad \frac{\partial\dot{I}}{\partial K} = -\underbrace{\frac{1 + \phi'}{\phi''}}_{+}\underbrace{F''}_{-} > 0, \quad \left.\frac{\partial\dot{I}}{\partial I}\right|_{\dot{I}=0} = 0. \tag{10.14}$$

Tämä tarkoitta sitä, että (K, I)-tasossa käyrä $(\dot{K} = 0)$ on nouseva ja käyrä $(\dot{I} = 0)$ pystysuora:

$$\left.\frac{dI}{dK}\right|_{\dot{K}=0} = -\frac{\partial\dot{K}}{\partial K}\Big/\frac{\partial\dot{K}}{\partial I} = \mu > 0, \quad \dot{I} = 0 \;\Leftrightarrow\; F'(K) = r + \mu.$$

(kuva 10.1 tähän)

Muuttuja K sopeutuu kohden käyrää $(\dot{K} = 0)$ ja käyrän $(\dot{I} = 0)$ oikealla (vasemmalla) puolella muuttuja I kasvaa (pienenee):

(kuva 10.2 tähän)

Tästä havaitaan, että systeemillä on satulapisteratkaisu:

(kuva 10.3 tähän)

Sama matemaattisesti:

$$\underbrace{\frac{\partial \dot{K}}{\partial I}}_{+}\underbrace{\frac{\partial \dot{I}}{\partial K}}_{+} > \underbrace{\frac{\partial \dot{K}}{\partial K}}_{-}\underbrace{\frac{\partial \dot{I}}{\partial I}\Big|_{\dot{I}=0}}_{=0}.$$

Välttämättömistä ehdoista (10.11) and (10.12) ainoa jota ei vielä ole osoitettu olevan voimassa on trasnversaaliehto

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)K(t)e^{-\rho t} = 0.$$

Näin ollen on löydettävä sellainen alkuarvo $\lambda(0)$ liittomuuttujalle λ että

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)K(t)e^{-\rho t} = 0$$

pätee. Kuvasta 10.3 nähdään että on olemassa satulapisteura joka johtaa tasapainoon (K^*, I^*). Näin ollen jos hyppymuuttujan I alkuarvo $I(0)$ valitaan sopivasti, niin systeemi siirtyy yksikäsitteisesti tasapainoon (K^*, I^*), jossa $K = K^*$, $I = I^*$ and $\lambda = 1 + \phi'(I)$ ovat vakioita ja

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)K(t)e^{-\rho t} = \lim_{t\to\infty} \lambda^* K^* e^{-\rho t} = 0.$$

Tämä osoittaa, että myös transversaalisuusehto on voimassa. Koska alkuarvo $I(0)$ on yksikäsitteinen, niin systeemin sopeutumisurakin on yksikäsitteinen.

10.3.1 Miten systeemin kehitys muuttuu, kun korko r nousee?

Relaatioista (10.7), (10.8), (10.13) ja (10.14) seuraa, että

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial r} = \frac{1+\phi'(I)}{\phi''(I)} > 0, \quad \frac{dK}{dr}\Big|_{\dot{K}=0} = -\frac{\partial \dot{K}}{\partial r}\Big/\frac{\partial \dot{K}}{\partial K} = 0,$$
$$\frac{dK}{dr}\Big|_{\dot{I}=0} = -\underbrace{\frac{\partial \dot{I}}{\partial r}}_{+}\Big/\underbrace{\frac{\partial \dot{I}}{\partial K}}_{+} < 0.$$

Toisin sanoen: käyrä $(\dot{K} = 0)$ ei sirry mihinkään, mutta käyrä $(\dot{I} = 0)$ siirtyy vasemmalle $(\dot{I} = 0)_0 \to (\dot{I} = 0)_1$:

(kuva 10.4 tähän)

Sijoittamalla tähän satulapisteurat nähdään, että pääoma pienenee $K_0 \to K_1$ ja investoinnit supistuvat ja aliampuvat lyhyellä aikavälillä, $I_0 - \hat{I} > I_0 - I_1$:

(kuva 10.5 tähän)

10.3.2 Miten systeemin kehitys muuttuu, kun poistoaste μ nousee?

Relaatioista (10.7), (10.8), (10.13) ja (10.14) seuraa, että

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial \mu} < 0, \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial \mu} = \frac{1 + \phi'(I)}{\phi''(I)} > 0, \quad \left.\frac{dK}{d\mu}\right|_{\dot{K}=0} = -\underbrace{\frac{\partial \dot{K}}{\partial \mu}}_{-} \Big/ \underbrace{\frac{\partial \dot{K}}{\partial K}}_{-} < 0,$$

$$\left.\frac{dK}{d\mu}\right|_{\dot{I}=0} = -\underbrace{\frac{\partial \dot{I}}{\partial \mu}}_{+} \Big/ \underbrace{\frac{\partial \dot{I}}{\partial K}}_{+} < 0.$$

Toisin sanoen: käyrä ($\dot{I} = 0$) siirtyy vasemmalle $(\dot{I} = 0)_0 \to (\dot{I} = 0)_1$ ja käyrä ($\dot{K} = 0$) kiertyy origon ympäri kellonvastaisesti (so. vastapäivään) $(\dot{K} = 0)_0 \to (\dot{K} = 0)_1$:

(kuva 10.6 tähän)

Sijoittamalla tähän satulapisteurat nähdään, että pääoma pienenee $K_0 \to K_1$, mutta investoitien muutos jää epäselväksi, $I_1 \gtrless I_0$ ja $\hat{I} \gtrless I_0$:

(kuva 10.7 tähän)

10.4 Sovellus: hyödyn maksimointi yli ajan

10.4.1 CIES hyötyfunktio

Ramseyn hyötyfunktio eli CIES hyötyfunktio[2] on muotoa

$$U = \int_0^\infty u(C(t))e^{-\rho t} dt \text{ with } u(C) \doteq \frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} \quad \text{with } \theta > 0, \theta \neq 1, \quad (10.15)$$

missä t on aika, $t = 0$ nykyhetki, C kulutus, $u(C)$ hetkittäinen hyötyfunktio, $\rho > 0$ subjektiivinen diskonttokorko (constant rate of time preference, vakio) ja $\theta > 0$ yli ajan substutuutionjouston käänteisarvo (vakio). Koska rahahyöty $u'(C)$ on aleneva, kuluttajan pyrkii tasoittamaan kulutuksensa yli ajan. Mitä suurempi θ, sitä nopeampi on rajahyödyn $u'(C)$ suhteellinen muutos kulutuksen C kasvaessa ja sitä haluttomampi kotitalous on hyväksymään poikkeamat tavoiteena olevasta vakiokulutustasosta. Kun θ lähenee nollaa, hyötyfunktio $u(C)$ lähenee lineaarista muotoa C, jolloin kotitalous on indifferentti kulutuksen ajoituksen suhteen, jos korko r on yhtäsuuri kuin subjektiivinen diskonttokorko ρ.

Oletetaan että kotitalous pystyy investoimaan minkä tahansa määrän markkinakorolla r. Olkoon $W(t)$ kotitalouden kokonaisvarallisuus ja $Y(t)$ sen tulot hetkellä t. Kotitalous säästää kasaamalla varallisuutta W seuraavasti:

$$\dot{W}(t) = rW(t) + Y(t) - C(t), \quad (10.16)$$

[2]**C**onstant **I**ntertemporal **E**lasticity of **S**ubstitution (= yli ajan vakiojoustoinen).

missä r on korko, Y tulot ja C kulutus. Valitaan kulutushinta ykköseksi.

Kotitalous maksimoi hyötyään (10.15) kulutuksen C avulla rajoitteena varallisuuden muutos (10.15). Tätä maksimointia vastaava Hamiltonin funktio on

$$H_t = u(C(t)) + \lambda \dot{W}(t) = u(C(t)) + \lambda(t)[rW(t) + Y(t) - C(t)]. \qquad (10.17)$$

Tilamuuttujaa W vastaava liittomuuttuja on λ ja se voidaan tulkita varallisuuden W varjohinnaksi. Se muuttuu seuraavasti:

$$\dot{\lambda}(t) = \rho\lambda(t) - \frac{\partial H_t}{\partial W(t)} = (\rho - r)\lambda(t), \quad \lim_{t\to\infty} \lambda(t)W(t)e^{-\rho t} = 0. \qquad (10.18)$$

Ottaen huomioon (10.15), Hamiltonin funktion (10.17) maksimointi kulutuksen C avulla johtaa 1. asteen ehtoon

$$\frac{\partial H_t}{\partial C(t)} = u'(C(t)) - \lambda(t) = C(t)^{-\theta} - \lambda(t) = 0.$$

Tästä ja yhtälöstä (10.18) saadaan $C(t)^{-\theta} = \lambda(t)$, $C(t) = \lambda(t)^{-1/\theta}$, $\log C(t) = -\theta \log \lambda(t)$ sekä

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{d \log C(t)}{dt} = -\theta \frac{d \log \lambda(t)}{dt} = -\theta \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \frac{r - \rho}{\theta}.$$

Johtopäätös: *Jos kotitaloudella on CIES hyötyfunktio* (10.15) *ja jos se voi sijoittaa tai lainata yhdellä ja samalla korolla r minkä summan tahansa, niin sen reaalinen kulutus C kehittyy **Eulerin yhtälön** mukaan:*

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{r - \rho}{\theta} \quad \text{joka hetki } t. \qquad (10.19)$$

HARJOITUS: Johda kulutuksen kehitys logaritmiselle hyötyfunktiolle

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t} \log C(t) dt,$$

missä ρ on subjetiivinen diskonttokorko ja $\log C$ hetkittäinen hyötyfunktio. Tämä funktio on erikoistapaus funktiosta (10.15), kun $\theta \to 1$.

10.4.2 Dynastinen perhe

Yksittäinen henkilö, joka ei välitä muiden ihmisten hyvinvoinnista, ottaa huomioon sen että hän ei elä ikuisesti. Jos 0 on nykyhetki ja T on tällaisen henkilön elinaika, niin hän maksimoi hyötyä yli periodin $[0, T]$. Matamaattisista syistä on kuitenkin helpompaa maksimoida funktionaalia

$$\int_0^\infty u(C(t))e^{-\rho t} dt$$

kuin funktionaalia

$$\int_0^T u(C(t))e^{-\rho t} dt.$$

Tämä ongelma voidaan ratkaista kahdella tavalla.

Tapa I. Oletetaan että henkilön elinaika T on satunnaismuuttuja, joka noudattaa Poisson jakaumaa: kuolema todennäköisyys kahta kertaa pidemmällä ajanjaksolla on kaksi kertaa suurempi. Tällöin hyötyfunktio

$$\int_0^T u(C(t))e^{-\rho t}dt$$

voidaan pyöristää muotoon

$$\int_0^\infty u(C(t))e^{-\widetilde{\rho} t}dt,$$

mutta siten että uusi diskonttokorko on suurempi, $\widetilde{\rho} > \rho$.[3] Emme kuitenkaan käsittele tätä tapausta nyt, koska se on matemaattisesti mutkikkaampi.

Tapa II. Oletetaan, että kulutuksesta päättävä yksikkö ei ole yksi ihminen, vann perhe, jossa

(i) on useita sukupolvia,

(ii) ei-vääristävät tulonsiirrot jäsenten välillä ovat mahdollisia,

(iii) kaikilla jäsenillä on sama hyötyfunktio,

(iv) kaikilla jäsenillä on sama paino perheen hyötyfunktiossa, ja

(v) perheenjäsenten lukumäärä kasvaa vakiovauhtia n.

Oletuksista (ii)-(iv) seuraa että jokainen perheejäsen kuluttaa saman määrän C, ja oletuksista (i) and (iv) että perheen hyötyfynktio on nollasta äärettömään. Valitaan mukavuuden vuoksi perheen jäsenten määrä hetkellä nolla ykköseksi. Tällöin oletuksesta (v) seuraa että dynastisen perheen jäsenten lukumäärä on e^{nt} hetkellä t. Oletuksen (iv) nojalla perheen hyötyfunktio on jäsenten hyötyfunktioiden summa. Jos yksittäisen jäsenen hetkittäinen hyöty on $u(C)$, niin koko perheen hetkittäinen hyötyfunktio $e^{nt}u(C(t))$ on $u(C(t))$ kertaa jäsenten määrä e^{nt} hetkellä t. Tällöin dynastinen perhe maksimoi

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t}U^f dt = \int_0^\infty e^{(n-\rho)t}U(C)dt,$$

missä $\rho > 0$ on subjektiivinen diskonttokorko ja C kulutus jäsentä kohden. Toisin sanoen dynastinen perhe käyttäytyy ikään kuin sen olisi yksi kotitalous joka elää iäti, mutta jonka subjetiivinen diskonttokorkoa ρ on pienennetty jäsenten kasvunopeuden n verran.

[3]See Blanchard and Fischer (1989), kappale 3; tai Barro and Sala-i-Martin (1995), kappale 3.

10.5 Ramseyn kasvumalli

Frank Ramsey julkaisi 1928 aikakauskirjassa The Economic Journal artikkelin joka loi perustan optikasvuteorialle. Sen pääsisältö on seuraava. Alkuperäisissä laskelmissaan Ramsey käytti variaatiolaskentaa. Nykyään samat tulokset saadaan helpommin maksimiperiaatteen avulla.

Ramseyn ongelma: kuinka suuren osuuden kansankunnan tulisi säästää eli mikä on sen optimisäästämisalttius?

Oletetaan, että taloudella on neoclassinen tuotantofunktio

$$Y = F(K(t), L(t)), \quad F_L > 0, \;\; F_K > 0, \;\; F_{LL} < 0, \;\; F_{KK} < 0, \;\; F_{KL} > 0, \tag{10.20}$$

missä t on aika, $Y(t)$ tuotos, $K(t)$ pääoma, $L(t)$ työ, ja alaindeksit K ja L tarkoittavat osittaisderivaattoja muuttujien K ja L suhteen. Jos funktiolla (10.20) on vakioskaalatuotot, se voidaan kirjoittaa myös per capita muotoon (= henkeä tai työpanosta kohti) seuraavasti:

$$\begin{aligned} & y(t) = f(k(t)), \;\; f' > 0, \;\; f'' < 0, \\ & y(t) \doteq \frac{Y(t)}{L(t)}, \;\; k(t) \doteq \frac{K(t)}{L(t)}, \;\; f(k(t)) \doteq F(k(t), 1). \end{aligned} \tag{10.21}$$

Oletetaan että työvoima L kasvaa vakiovauhtia n:

$$\dot{L}(t)/L(t) = n. \tag{10.22}$$

Oletetaan, että kansantalouden edustavalla kuluttajalla on CIES hyötyfunkto [ks. kappale 10.4.1]

$$\int_0^\infty \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-\rho t} dt, \quad \theta > 0, \quad \theta \neq 1, \tag{10.23}$$

missä ρ on subjektiivinen diskonttokorko, $\theta > 0$ yli ajan substutuutionjouston käänteisarvo (vakio), C kulutus, $c \doteq C/L$ kulutus per capita ja $u(c)$ hetkittäinen hyötyfunktio. investoinnit pääomaan, $\dot{K}$, ovat yhtä kuin tuotanto Y minus kulutus C minus pääoman poistot μK, missä $\mu \in (0,1)$ on vakiopoistoaste:

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \mu K(t).$$

Ottaen huomioon (10.20)-(10.23), tämä voidaan kirjoittaa per capita termein seuraavasti:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{Y(t) - C(t)}{L(t)} - (\mu + n)\frac{K(t)}{L(t)} \\ &= y(t) - c(t) - (\mu + n)k(t) = f(k(t)) - c(t) - (\mu + n)k(t). \end{aligned} \tag{10.24}$$

Kulutus henkeä kohden, $c(t)$ for $t \in [0, \infty)$, valitaan sitne, että hyöty (10.23) maksimoituu rajoitteena pääoman kasautuminen (10.24). Tätä ongelmaa vastaava Hamiltonin funktio on

$$\begin{aligned} H(c(t), k(t), \lambda(t)) &= \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda(t)\dot{k}(t) \\ &= \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda(t)[f(k(t)) - c(t) - (\mu + n)k(t)], \end{aligned} \tag{10.25}$$

missä liittomuuttuja λ noudattaa differentiaaliyhtälöä

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= \rho\lambda(t) - \frac{\partial H(c(t), k(t), \lambda(t))}{\partial k(t)} \\
&= [\rho + \mu + n - f'(k(t))]\lambda(t), \quad \lim_{t\to\infty} \lambda(t)k(t)e^{-\rho t} = 0. \qquad (10.26)
\end{aligned}
$$

Hamiltonin funktio (10.25) maksimoidaan joka hetki per capita kulutuksen $c(t)$ avulla. Täsät saadaan 1. asteen ehto

$$\frac{\partial H(c(t), k(t), \lambda(t))}{\partial c(t)} = c(t)^{-\theta} - \lambda(t) = 0. \qquad (10.27)$$

Yhtälöt (10.26) ja (10.27) ovat optimointiongelman välttämättömät ehdot. Näin ollen meillä on systeemi, joka koostuu kahdesta differentiaaliyhtälöstä (10.24) and (10.26), ja jossa pääoma k on ennaltamäärätty ja liittomuuttuja (= pääoman varjohinta) λ on hyppymuuttuja. Koska

$$\frac{\partial H(c(t), k(t), \lambda(t))}{\partial c(t)} = -\theta c(t)^{-\theta} < 0,$$

Hamiltonin funktion maksimoinnin 2. asteen ehdot pätevät. Näin ollen jos välttämättömät ehdot (10.26) and (10.27) ovat voimassa, niin silloin ratkaisu on yksikäsitteinen.

Eliminoidaan nyt liittomuuttuja λ 1. asteen ehdon (10.26) avulla. derivoimalla (10.26) ajan t suhteen ja sijoittamalla (10.26) siihen saadaan

$$-\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{d\log[c(t)^{-\theta}]}{dt} = \frac{d\log\lambda(t)}{dt} = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \rho + \mu + n - f'(k(t)).$$

Tämä tulos voidaan kirjoittaa myös *Eulerin yhtälöksi*

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}[f'(k(t)) - \rho - \mu - n] \qquad (10.28)$$

Nyt meilläon kahden differentiaaliyhtlön (10.24) and (10.28) systeemi, jossa per capita pääoma $k(t)$, on ennaltamäärätty ja per capita kulutus $c(t)$ (joka korvaa liittomuuttujan λ) hyppymuuttuja. Jos otetaan huomioon (10.21), tasapainon $\dot{k} = \dot{c} = 0$ ympäristössä tällä systeemillä on (k, c)-tasossa seuraavat ominaisuudet:

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}\right|_{\dot{c}=0} = [f' - \mu - n]_{\dot{c}=0} = \rho > 0, \quad \frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1 < 0, \quad \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = \frac{c}{\theta}f'' < 0, \\
&\left.\frac{\partial \dot{c}}{\partial c}\right|_{\dot{c}=0} = 0, \quad \left.\frac{dc}{dk}\right|_{\dot{k}=0} = -\left.\frac{\partial \dot{k}}{\partial k}\right|_{\dot{c}=0}\Big/\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = \rho > 0, \quad \dot{c} = 0 \text{ pystysuora.} \qquad (10.29)
\end{aligned}
$$

Täten käyrä ($\dot{k} = 0$) on nouseva, käyrä ($\dot{c} = 0$) pystytsuora, k pienenee (kasvaa) käyrän ($\dot{k} = 0$) vasemmalla (oikealla) puolella ja c kasvaa (pienenee) käyrän ($\dot{k} = 0$) vasemalla (oikealla) puolella:

(kuva 10.8 tähän)

Välttämättömistä ehdoista (10.26) and (10.27) ainoa jota ei vielä ole osoitettu olevan voimassa on transversaaliehto $\lim_{t\to\infty}\lambda(t)k(t)e^{-\rho t}=0$. Näin ollen on löydettävä sellainen alkuarvo $\lambda(0)$ liittomuuttujalle λ että $\lim_{t\to\infty}\lambda(t)k(t)e^{-\rho t}=0$ pätee. Kuviosta 10.8 nähdään että on olemassa satulapisteura joka johtaa tasapainoon (k^*,c^*). Näin ollen jos hyppymuuttujan c alkuarvo $c(0)$ valitaan sopivasti, niin systeemi siirtyy yksikäsitteisesti tasapainoon (k^*,c^*), jossa $k=k^*$, $c=c^*$ and $\lambda=\lambda^*\doteq(c^*)^{-\theta}$ ovat vakioita ja

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)k(t)e^{-\rho t}=\lim_{t\to\infty}\lambda^*k^*e^{-\rho t}=0.$$

Tämä osoittaa, että myös transversaalisuusehto on voimassa. Koska alkuarvo $c(0)$ on yksikäsitteinen, systeemin sopeutumisura on yksikäsitteinen.

Vastaus Ramseyn ongelmaan. Talouden säästämisalttius on

$$\frac{\text{saving}}{\text{income}}=\frac{Y-C}{Y}=\frac{y-c}{y}.$$

Tästä ja (10.24):sta seuraa

$$\left.\frac{y-c}{y}\right|_{\dot{k}=0}=(\mu+n)\frac{k}{y}.$$

Toisin sanoen: *Tasapainossa säästämisalttius on* $(\mu+n)\frac{k}{y}$*, missä* μ *on pääoman poistoosuus,* n *väestön kasvunopeus ja* $\frac{K}{Y}=\frac{k}{y}$ *pääoma/tuotos -suhdeluku.*

10.5.1 Sovellus 1: väestön kasvunopeus nousee

Oletetaan että väestön kasvunopeus n nousee. Miten rationaalinen talous sopeutuu tähän muutokseen?

Tasapainon muutos saadaan komparatiivisen statiikan avulla seuraavasti. Yhtälöiden (10.24) and (10.28) perusteella tasapainossa pätee

$$\dot{k}=f(k(t))-c(t)-(\mu+n)k(t)=0,\quad \theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=f'(k(t))-\rho-\mu-n=0. \tag{10.30}$$

Linearisoimalla nämä yhtälöt tasapainon lähiympäristössä saadaan

$$\begin{aligned}0&=\begin{pmatrix} f'-\mu-n & -1\\ f'' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dk\\ dc\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -k\\ -1\end{pmatrix}dn\\ &=^{(10.30)}\begin{pmatrix} \rho & -1\\ f'' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dk\\ dc\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -k\\ -1\end{pmatrix}dn.\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial n}&=-\begin{vmatrix} -k & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} \rho & -1\\ f'' & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{f''}<0,\\ \frac{\partial c}{\partial n}&=-\begin{vmatrix} \rho & -k\\ f'' & -1\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix} \rho & -1\\ f'' & 0\end{vmatrix}=\frac{\rho}{f''}-k<0.\end{aligned}$$

Täten $k_1 < k_0$ and $c_1 < c_0$, missä (k_0, c_0) on vanha ja (k_1, c_1) uusi tasapaino.
Differentiaaliyhtälöistä (10.24) and (10.28) saadaan

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial n} = -k < 0, \quad \frac{\partial \dot{c}}{\partial n} = -\frac{c}{\theta} < 0.$$

Näistä ja yhtälöstä (10.29) seuraa että (k, c) tasossa käyrä $(\dot{k} = 0)$ liikkuu oikealle asemasta $(\dot{k} = 0)_0$ asemaan $(\dot{k} = 0)_1$, mutta käyrä $(\dot{c} = 0)$ vasemalle asemasta $(\dot{c} = 0)_0$ asemaan $(\dot{c} = 0)_1$:

$$\left.\frac{dk}{dn}\right|_{\dot{k}=0} = -\frac{\partial \dot{k}}{\partial n} \Big/ \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = \frac{k}{\theta} > 0, \quad \left.\frac{dk}{dn}\right|_{\dot{c}=0} = -\frac{\partial \dot{c}}{\partial n} \Big/ \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = \frac{1}{f''} < 0.$$

(kuva 10.9 tähän)

Sekä per capita pääoma k että per capita kulutus c putoavat, $k_0 \to k_1$ ja $c_0 \to c_1$. Koska korkeammalla väestönkasvun tasolla tarvitaan enemmän säästämistä, jotta per capita pääoma k pysyisi samalla tasolla, per capita kulutus laskee. Koska kulutuksen lasku nostaa kulutuksen rajahyötyä, per capita pääomaa k ei kuitenkaan kannata palauttaa kokonaan entiselle tasolleen.

10.5.2 Sovellus 2: kotitaloudet tulevat kärsivällisemmiksi

Jos kotitaloudet tulevat kärsivällisemmiksi, niiden subjetiivinen diskonttokorko ρ laskee. Linearisoimalla yhtälöt(10.30) tasapainon $\dot{k} = \dot{c} = 0$ ympäristössä saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} f' - \mu - n & -1 \\ f'' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk \\ dc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\rho \\ &=^{(10.30)} \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ f'' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dk \\ dc \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} d\rho. \end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \rho} &= -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \rho & -1 \\ f'' & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{f''} < 0, \\ \frac{\partial c}{\partial \rho} &= -\begin{vmatrix} \rho & 0 \\ f'' & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \rho & -1 \\ f'' & 0 \end{vmatrix} = \frac{\rho}{f''} < 0. \end{aligned}$$

Täten ρ;n putoaminen nostaa k:ta tasolta k_0 tasolle k_1 ja c:tä tasolta c_0 tasolle c_1, missä (k_0, c_0) on vanha ja (k_1, c_1) uusi tasapaino.
Differentiaaliyhtälöiden (10.24) and (10.28) perusteella saadaan

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial \dot{c}}{\partial \rho} = -\frac{c}{\theta} < 0.$$

Näistä ja yhtälöstä (10.29) seuraa että (k, c)-tasossa käyrä $(\dot{k} = 0)$ ei siirry ollenkaan, mutta käyrä $(\dot{c} = 0)$ siirtyy oikealle asemasta $(\dot{c} = 0)_0$ asemaan $(\dot{c} = 0)_1$, kun ρ laskee:

$$\left.\frac{dk}{d\rho}\right|_{\dot{k}=0} = -\frac{\partial \dot{k}}{\partial \rho} \Big/ \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = 0, \quad \left.\frac{dk}{d\rho}\right|_{\dot{c}=0} = -\frac{\partial \dot{c}}{\partial \rho} \Big/ \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = \frac{1}{f''} < 0.$$

(kuva 10.10 tähän)

Per capita pääoma k nousee tasaisesti tasolta k_0 tasolle k_1. Per capita kulutus c putoaa epäjatkuvasti tasolta c_0 tasolle $\hat{c}$, mutta sitten kasvaa tasaisesti tasolta $\hat{c}$ tasolle c_1. Jotta pääomaa voitaisiin lisätä suhteessa työvoimaan, per capita kulutusta pitää laskea ja säästämistä lisätä aluksi. Pääoman kasautuessa kulutus pitkällä aikavälillä nousee yli alkuperäisen tasonsa.

10.6 AK malli

Endogeenisen eli sisäsyntyisen kasvun teoria perustuu ulkoisvaikutuksiin. Kun yksi tuottaja keksii jotakin, niin samalla toisetkin tuottajat oppivat jotakin. Yksinkertaisin tapa mallittaa tämänkaltaisia ulkoisvaikutuksia on seuraava.

Oletetaan ensiksi, että työn tuottavuus q on yksityiselle tuottajalle eksogeeninen. Tällöin tuotantofunktio (10.20) voidaan laajentaa muotoon

$$Y = F(K(t), q(t)L(t)), \quad F_L > 0, \ F_K > 0, \ F_{LL} < 0, \ F_{KL} < 0, \ F_{KL} > 0. \tag{10.31}$$

Oletetaan seuraavaksi, että technologinen muutos on pääomavaltaistumisen (capital-deepening) sivutuote: jos pääoman kasvuvauhti $\dot{K}/K$ ylittää työvoiman kasvuvauhdin $\dot{L}/L = n$, niin teknologiaa täytyy parantaa kehittämällä uusia koneita, jotka vaativat vähemmän työvoimaa kuin vanhat koneet. Näillä uusilla koneilla työläiset tuottavat enemmän tavaraa ja pääoma/työ -suhdeluku k nousee. Tällä perusteella oletamme yksinkertaisuuden vuoksi, että makrotasolla työn tuottavuus q kasvaa vakiosuhteessa pääomavaltaistumiseen $\dot{K}/K - \dot{L}/L$:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} &= \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{d\log K(t)}{dt} - \frac{d\log L(t)}{dt} = \frac{d\log(K(t)/L(t))}{dt} \\ &= \frac{d\log k(t)}{dt} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}.\end{aligned}$$

Integroimalla tämä yhtälö molemmin puolin ajan t suhteen saadaan

$$q(t) = ak(t), \tag{10.32}$$

missä a on jokin positiivinen vakio.

Jos tuotantofunktiolla (10.31) on vakioskaalatuotot, niin silloin sijoittamalla siihen (10.32) saadaan tuotantofunktio *per capita* termein:

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} &= F\Big(\frac{K(t)}{L(t)}, q(t)\Big) = F(k(t), q(t)) = F(k(t), ak(t)) \\ &= F(1, a)k(t) = Ak(t), \end{aligned} \tag{10.33}$$

missä $A \doteq F(1, a)$ on vakio. Tämä on tunnettu AK malli: koko kansantuote (per capita) y voidaan tuottaa vakioskaalatuottoisesti tuotettavista resursseista (tässä tapauksesta pääomasta k per capita).[4]

Loppuosa mallista on sama kuin edellisessä kappaleessa 10.5: kotitalouksilla on CIES hyötyfunktio (10.23) ja pääoma kasautuu säästäminen avulla,

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \mu K(t).$$

Sijoittamalla $k = K/L$ ja tuotantofunktio (10.33) tähän yhtälöön saadaan

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{Y(t) - C(t)}{L(t)} - (\mu + n)\frac{K(t)}{L(t)} \\ &= y(t) - c(t) - (\mu + n)k(t) = Ak(t) - c(t) - (\mu + n)k(t). \qquad (10.34)\end{aligned}$$

Hyötyä (10.23) maksimoidaan per capita kulutuksen $c(t)$, $t \in [0, \infty)$, avulla rajoitteena pääoman kasautuminen (10.24). Tätä ongelmaa vastaava Hamiltonin funktio on

$$\begin{aligned}H(c(t), k(t), \lambda(t)) &= \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} + \lambda(t)\dot{k}(t) \\ &= \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} + \lambda(t)[Ak(t) - c(t) - (\mu + n)k(t)], \qquad (10.35)\end{aligned}$$

missä liittomuuttuja λ muuttuu seuraavasti:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) &= \rho\lambda(t) - \frac{\partial H(c(t), k(t), \lambda(t))}{\partial k(t)} = [\rho + \mu + n - A]\lambda(t), \\ &\lim_{t\to\infty} \lambda(t)k(t)e^{-\rho t} = 0. \qquad (10.36)\end{aligned}$$

Hamiltonin funktio (10.35) maksimoidaan joka hetki t per capita kulutuksen $c(t)$ avulla. Tästä saadaan 1. asteen ehto

$$\frac{\partial H(c(t), k(t), \lambda(t))}{\partial c(t)} = c(t)^{-\theta} - \lambda(t) = 0. \qquad (10.37)$$

Optimoinnin välttämättömät ehdot ovat (10.36) ja (10.37).

Nyt meillä on olemassa kahden differentiaaliyhtälön (10.34) ja (10.36) systeemi, jossa pääoma (per capita) k on ennaltamäärätty ja liittomuuttuja λ on hyppymuuttuja. Koska

$$\frac{\partial^2 H(c(t), k(t), \lambda(t))}{\partial c(t)^2} = -\theta c(t)^{-\theta} < 0,$$

Hamiltonin funktion maksimoinnin 2. asteen ehdot ovat myös voimassa. Täten jos välttämättömät ehdot (10.36) and (10.37) pätevät, niin ratkaisu on yksikäsitteinen.

[4]Olen muokannut AK mallia sisällyttämällä siihen myös väestönkasvun $\dot{L}/L = n$.

Eliminoidaan liittomuuttuja λ käyttäen hyväksi 1. asteen ehtoa (10.37). Dervoimalla (10.37) ajan t suhteen ja sijoittamalla (10.36) saadaan

$$-\theta\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{d\log[c(t)^{-\theta}]}{dt} = \frac{d\log\lambda(t)}{dt} = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \rho + \mu + n - A.$$

Tämä tulos voidaan kirjoittaa myös *Eulerin yhtälönä* seuraavasti:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}[A - \rho - \mu - n] \tag{10.38}$$

Nyt meillä on kahden differentiaaliyhtälön (10.24) and (10.28) systeemi, jossa pääoma (per capita) $k(t)$ on ennaltamäärätty ja kulutus (per capita) $c(t)$ (joka korvaa liittomuuttujan λ) on hyppymuuttuja.

Pääoman kasautuminen (10.35) voidaan kirjoittaa myös seuraavasti:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A - \frac{c(t)}{k(t)} - \mu - n. \tag{10.39}$$

Tämä osoittaa, että jos pääoman (per capita) kasvunopeus $\dot{k}/k$ pidetään vakiona, niin silloin myös kulutuksen suhde pääomaan c/k on niinikään vakio. Täten on olemassa tasapaino, jossa pääoma k ja kulutus c kasvavat samaa vauhtia (molemmat per capita). Yhtälöiden (10.33), (10.38) ja (10.39) perusteella tämä tasapainoinen kasvunopeus määräytyy seuraavasti:

$$A - \frac{c(t)}{k(t)} - \mu - n = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}[A - \rho - \mu - n]. \tag{10.40}$$

Tässä tasapainossa kulutuksen ja pääoman suhdeluku on myös vakio:

$$\frac{c(t)}{k(t)} = \frac{\rho}{\theta} + \Big(1 - \frac{1}{\theta}\Big)(A - \mu - n). \tag{10.41}$$

Yhtälöiden (10.33) and (10.40) nojalla koko kansantalouden *yleiseksi kasvunopeudeksi* g saadaan

$$g \doteq \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}[A - \rho - \mu - n]. \tag{10.42}$$

Tulos (10.42) on talouden tasapaino (steady state). Koska mallissa on vain yksi ennaltamäärätty muuttuja k, eksogeenisen muutoksen jälkeen hyppymuuttujat λ ja c hypäävät heti tasolle, joka vastaa tasapainoa (10.42) ja mallissa ei ole lainkaan dynamiikkaa. Väentönkasvun n nousu pienentää, mutta kärsivällisyyden kasvu (i.e. ρ putoaa) suurentaa yleistä kasvunopeutta g.

Yhtälöiden (10.33) ja (10.41) nojalla talouden säästämisalttius s on myös vakio:

$$\begin{aligned} s \doteq \frac{\text{saving}}{\text{income}} &= \frac{Y - C}{Y} = \frac{y - c}{y} = 1 - \frac{c}{y} = 1 - \frac{c}{Ak} \\ &= \frac{1}{A}\Big[1 - \frac{\rho}{\theta} + \Big(\frac{1}{\theta} - 1\Big)(A - \mu - n)\Big]. \end{aligned}$$

Mitä kärsivällisemmät kotitaloudet (i.e. mitä pienempi ρ), sitä halukkaammpia he ovat siirtämään kulutust tulevaisuuteen ja sitä korkeampi säästämisalttius s.

Väenstönkasvun n vaikutus säästämisalttiuteen s riippuu the yli ajan substituutiojoustosta $\frac{1}{\theta}$. Jos $\frac{1}{\theta}$ on suurempi (pienempi) kuin yksi, väestön kasvunopeuden n nousu lisää (vähentää) säästämisalttiutta. Tämän tuloksen tulkinta on seuraava. Väestön kasvunopeuden n nousu laskee pääoman tuottoa

$$y/k - \mu - n = A - \mu - n.$$

Tällä puolestaan on kaksi vastakkaista vaikutusta säästämiseen: the *substituutiovaikutus*, joka korvaa tulevaa kulutusta nykykulutuksella ja laskee säästämisalttiutta, ja *tulovaikutus*, joka laskee nykykulutusta ja nostaa säästämisalttiutta. Jos yli ajan substituutiojousto on riittävän suuri, $\frac{1}{\theta} > 1$, substituutiovaikutus on voimakkaampi ja säästämisalttius putoaa, mutta jos yli ajan substituutiojousto on riittävän matala, $\frac{1}{\theta} < 1$, substituutiovaikutus on voimakkaampi ja säästämisalttius nousee.

11 Diskreetit systeemit

11.1 Ensimmäisen asteen systeemit

Siirrymme nyt tarkastelemaan diskreettejä (so. differenssiyhtälöinä kuvattavia) systeemejä. Ensiksi tarkastelemme systeemiä, joka on muotoa

$$y_t = bx_t + \lambda y_{t-1}, \tag{11.1}$$

missä b ja λ ovat parametreja sekä y on endogeeninen ja x eksogeeninen muuttuja. Systeemiä (11.1) kutsutaan *taaksepäinkatsovaksi* (backward looking), koska siinä on endogeenisen muuttujan y menneitä arvoja, ja sen sanotaan olevan 1. astetta, koska sen suurin sisältämä viive on yksi.

Yhtälön (11.1) ratkaisu on muotoa erityisratkaisu plus vastaavan homogeenisen yhtälön $y_t = \lambda y_{t-1}$ yleinen ratkaisu. Kokeilemalla voidaan todeta, että kehitelmä

$$y_t = b\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} \tag{11.2}$$

toteuttaa yhtälön (11.1), so. (11.2) on yhtälön (11.1) erityisratkaisu. Sijoittamalla homogeeniseen yhtälöön $y_t = \lambda y_{t-1}$ kehitelmä $y_t = k^t$ saadaan $k = \lambda$ ja homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu $C\lambda^t$, missä C on vakio. Näin ollen yhtälön (11.1) yleinen ratkaisu on

$$y_t = b\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} + C\lambda^t. \tag{11.3}$$

Ratkaisusta (11.3) nähdään, että taaksepäinkatsovan systeemin (11.1) perusratkaisu eli *fundamentaali* (11.2) määräytyy eksogeenisen muuttujan nykyisen ja menneen kehityksen $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, ...$ perusteella. Parametrista λ riippuu, miten systeemi kehittyy tämän fundamentaalinsa ympärillä. Jos $|\lambda| < 1$, niin systeemin aikaura lähenee fundamentaalin aikauraa, ja jos $|\lambda| > 1$, niin se etäytyy tästä. Jos $\lambda > 0$, niin systeemin aikaura on aina samalla puolella fundamentaalin aikauraa, ja jos $\lambda < 0$, systeemin aikaura heilahtelee fundamentaalin aikauran molemmin puolin.

Seuraavaksi tarkastelemme systeemiä, joka on muotoa

$$y_t = gx_t + \mu y_{t+1}, \tag{11.4}$$

missä g ja μ ovat parametreja sekä y on endogeeninen ja x eksogeeninen muuttuja. Systeemiä (11.1) kutsutaan *eteenpäinkatsovaksi* (forward looking), koska siinä on endogeenisen muuttujan y tulevia arvoja, ja sen sanotaan olevan 1. astetta, koska suurin sen sisältämä eteenpäinsiirto on yksi.

Myös yhtälön (11.4) ratkaisu on muotoa erityisratkaisu plus homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu. Kokeilemalla

$$y_t = g\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i x_{t+i} \tag{11.5}$$

nähdään, että (11.5) on yhtälön (11.4) erityisratkaisu. Sijoittamalla $y_t = k^t$ vastaavaan homogeeniseen yhtälöön $y_t = \mu y_{t+1}$ saadaan tälle $k = \frac{1}{\mu}$ ja homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu $C(\frac{1}{\mu})^t = C\mu^{-t}$, missä C vakio. Siis yhtälön (11.4) yleinen ratkaisu on

$$y_t = g\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i x_{t+i} + C\mu^{-t}. \tag{11.6}$$

Ratkaisusta (11.6) nähdään, että taaksepäinkatsovan systeemin (11.1) perusratkaisu eli *fundamentaali* (11.2) määräytyy eksogeenisen muuttujan nykyisen ja tulevan kehityksen $x_t, x_{t+1}, x_{t+2}, ...$ perusteella. Parametrista μ riippuu, miten systeemi kehittyy tämän fundamentaalinsa ympärillä. Jos $|\mu| > 1$ ja $|\frac{1}{\mu}| < 1$, niin systeemin aikaura lähenee fundamentaalin aikauraa, ja jos $|\mu| < 1$ ja $|\frac{1}{\mu}| > 1$, niin se etäytyy tästä. Jos $\mu > 0$, niin systeemin aikaura on aina samalla puolella fundamentaalin aikauraa, ja jos $\mu < 0$, systeemin aikaura heilahtelee molemmin puolin tämän aikauraa.

11.2 Sovellus I: sopeutuvat odotukset

Aikaisemmin (1970-luvulle asti) suosittu tapa oli olettaa, että inflaatio-odotukset muodostuvat ennustevirheen korjauksesta:

$$q_t - q_{t-1} = \theta[p_t - q_t], \qquad 0 < \theta < 1, \tag{11.7}$$

missä p todellinen inflaatio, q inflaatio-odotukset, ja θ on edellisen periodin arvolle asetettu paino. Yhtälölle (11.7) voidaan antaa seuraava tulkinta. Yleisö (kuluttajat ja yritykset yms.) korjaa ennustevirheensä $p_t - q_t$ eli todellisen inflaation p_t ja odotetun inflaation q_t erotuksen osittain eli osuuden $\theta > 0$. Hän ei voi kuitenkaan olla varma siitä, että inflaatioasteen muutos on pysyvä, joten hän korjaa vain osittain ja siten $\theta < 1$.

Yhtälö (11.7) on helposti muunnettavissa muotoon

$$q_t = \frac{1}{1+\theta}q_{t-1} + \frac{\theta}{1+\theta}p_t.$$

Valitsemalla $x = p$, $y = q$, $b = \frac{\theta}{1+\theta}$ ja $\lambda = \frac{1}{1+\theta}$ saadaan taaksepäinkatsova systeemi (11.1), joten odotusten kehityksen määrää (11.3) eli

$$q_t = b\sum_{i=0}^{t}\lambda^i p_{t-i} + C\lambda^t = \frac{\theta}{1+\theta}\sum_{i=0}^{t}(\frac{1}{1+\theta})^i p_{t-i} + C(\frac{\theta}{1+\theta})^t.$$

Nyt koska $0 < \frac{\theta}{1+\theta} < 1$, niin hintaodotusten q aikaura lähenee uraa

$$q_t = \frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{t}(\frac{\theta}{1+\theta})^i p_{t-i}. \tag{11.8}$$

Ts. tämän hetken inflaatio-odotuksia q_t voidaan arvioida menneen inflaatiokehityksen geometrisesti painotetulla keskiarvolla (11.8), jossa paino pienenee viiveen kasvaessa.

Yhtälöön (11.7) tai (11.8) perustuvaa mekanismia sanotaan *sopeutuviksi eli taaksepäinkatsoviksi odotuksiksi.* Sopeutuvia odotuksia käytettiin makromalleissa aina 1970-luvulle saakka. Niillä on kuitenkin sellaisia ominaisuuksia, joita ei nykyaikaisissa malleissa voida hyväksyä:

(i) Yleisö ei reagoi eksogeeniseen muutokseen heti kun tämä tulee yleiseen tietoon, vaan vasta sitten kun tämä muutos heijastuu hintatasoon ja sittenkin viiveellä.

Esim. Oletetaan, että keskuspankki ilmoittaa nostavansa rahamäärän kas-vunopeuden pysyvästi korkeammalle tasolle. Yleisö käyttäytyy *epärationaalisesti*, jos se ei ota tällaista ilmoitusta heti huomioon arvioidessaan tulevaa hintakehitystä, vaan odottaa siihen saakka, kun rahamäärän muutos heijastuu hintoihin.

(ii) Kaava (11.7) merkitsee sitä, että niin kauan kun pitkän aikavälin tasapainoa ei ole saavutettu, yleisö *aliarvioi* tai *yliarvioi* inflaatioasteen. Näin silloinkin, kun sopeutumisaika on hyvin pitkä.

Ominaisuudet (i) ja (ii) ovat ristiriidassa rationaalisen käyttäytymisen kanssa. 1970-luvulla kehitettiin näihin ongelmiin ratkaisuksi *rationaaliset eli eteenpäinkatsovat odotukset.* Näiden ns. vahva versio perustuu olettamukseen, että yleisöllä kansantaloudesta käytössään yhtä hyvä malli kuin mallin tehneellä ekonomistilla. Näin ollen yleisö 'arvaa' oikein tulevan kehityksen ja muuttujan odotettuina arvoina voidaan käyttää näiden todellisia tulevien periodien arvoja.

11.3 Sovellus II: rationaalisten odotusten vahva versio

Olkoon p todellinen inflaatio, ja r inflaation pitkän aikavälin tasapainotaso, jonka malli ennustaa. Pitkän aikavälin tasapainossa r on endogeeninen, joten se on mallin eksogeenisten muuttujien funktio. Esimerkiksi sellaisessa makromallissa jossa kaikki markkinat ovat täydellisiä, r on (perus)rahan määrän kasvunopeus, joka se määrää pitkän aikavälin inflaation. Yleisö mukautuu hetkellä t etukäteen tiedossaan olevaan rahamäärän kehitykseen $r_t, r_{t+1}, r_{t+2}, ...$ seuraavan säännön avulla:

$$p_t - p_{t-1} = \eta[p_t - r_t], \qquad 0 < \eta < 1, \tag{11.9}$$

missä η sopeutumisparametri. On huomattava, että muuttujien p_t ja r_t kerroin yhtälön (11.9) oikealla puolella on aivan päinvastainen kuin yhtälössä (11.7). Yhtälön (11.9) tulkinta on seuraava. Jos hintatason kasvunopeus p_t jäisi pysyvästi rahamäärän kasvunopeuden r_t yläpuolelle, niin inflaatio kiihtyisi koko ajan (kupla ylöspäin): $p_t > p_{t-1}$. Vastaavasti jos hintatason kasvunopeus p_t jäisi pysyvästi rahamäärän kasvunopeuden r_t alapuolelle, niin deflaatio kiihtyisi koko ajan (kupla alaspäin): $p_t < p_{t-1}$.

Yhtälö (11.9) on helposti muunnettavissa muotoon $p_{t-1} = \eta r_t + (1-\eta)p_t$ ja

$$p_t = \eta r_{t+1} + (1-\eta)p_{t+1}.$$

Valitsemalla $p_t = y_t$, $r_{t+1} = x_t$, $g = \eta$ ja $\mu = 1 - \eta$ saadaan eteenpäinkatsova systeemi (11.4), joten odotusten kehityksen määrää (11.6) eli

$$p_t = g \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i r_{t+i+1} + C\mu^{-t} = \eta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\eta)^i r_{t+i+1} + C(\frac{1}{1-\eta})^t. \tag{11.10}$$

Tämän hetken inflaation p_t fundamentaali $\eta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\eta)^i r_{t+i+1}$ määräytyy tulevan rahamäärän kasvunopeuden $r_{t+1}, r_{t+2}, ...$ perusteella. Koska $\frac{1}{1-\eta} > 1$, etääntyy inflaatiokehitys fundamentaalista yhä enemmän ja enemmän, jos $C \neq 0$. Tämän ominaisuuden tulkinta on seuraava. Jokainen vakio C vastaa eri aikauraa. Jos $C = 0$, niin tämä aikaura on fundamentaali, jossa yleisö luottaa vakaan kehityksen jatkuvuuteen (vastaa jatkuvan mallin satulapisteuraa). Jos $C \neq 0$, niin saadaan tilanne, jossa yleisö ei luota vakaan kehityksen jatkuvuuteen, joten systeemi 'räjähtää'.

Mikäli keskuspankki pystyy pitämään rahamäärätavoitteensa vakaana $r_{t+1} = r_{t+2} = ... = r$, ratkaisun (11.10) fundamentaali tulee vielä yksinkertaisempaan muotoon:

$$p_t = \eta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\eta)^i r = r\eta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\eta)^i = r\eta \frac{1}{1-(1-\eta)} = r.$$

Tällöin hintatason kasvunopeus hyppää heti rahan vakaan kasvunopeuden tasolle r, jos yleisö luottaa kehityksen vakauteen: $C = 0$.

Toinen mallin (11.9) yleinen sovellus on ns. *Calvo-palkat.* Amerikkalainen ekonomisti Calvo on muodostanut mallin sopimuspalkkojen määräytymisestä seuraavien oletusten pohjalta. [5] Työmarkkinajärjestöt asettavat nimellispalkan p seuraamalla kiinteää reaalipalkkatavoitetta (joka sopivalla mittayksikön valinnalla voidaan olettaa ykköseksi). Tällöin nimellispalkan p tasapaino-arvo r on yhtä kuin hintataso, jonka työmarkkinajärjestöt ottavat eksogeenisena. Tulos (11.10) osoittaa, miten tuleva (mutta yleisesti tiedossa oleva) hintakehitys $r_t, r_{t+1}, r_{t+2}, ..., r_{t+T-1}$ määrää tämän hetken palkkatason p_t.

11.4 Ennustevirheen huomioonottaminen

Olkoon z_t muuttujan z todellinen arvo hetkellä t. Merkitsemme symbolilla $E_t z_{t+i}$ muuttujan z odotettua arvoa hetkellä $t + i$, joka perustuu hetkellä t käytettävissä oleviin tietoihin. On ilmeistä, että kullakin hetkellä mennyt kehitys on tiedossa, joten

$$E_t z_{t+i} = z_{t+i} \qquad \text{kun} \quad i \leq 0. \tag{11.11}$$

Toisin sanoen muuttujan z odotettu arvo jonain aikaisempana tai samana periodina on sama kuin tämän muuttujan todellinen arvo ko. periodina. Sen sijaan tulevaisuutta ennustettaessa on olemassa erehdyksen mahdollisuus eli odotettu arvo $E_t z_{t+i}$ voi poiketa todellisesta arvosta z_{t+i}, kun $i > 0$.

[5] Calvo, 'Staggered contracts and exchange rate policy', kirjassa Frenkel (toim.), Exchange Rates and International Macroeconomics, 1983, sivut 235-252.

Rationaalisten odotusten teorian perushypoteesi on, että talousyksiköt eivät tee systemaattisia ennustevirheitä. Tämä merkitsee sitä, että ennustevirhe

$$E_t z_{t+i} - z_{t+i} = u_{t+i} \tag{11.12}$$

on satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on nolla:

$$E_t u_{t+i} = 0. \tag{11.13}$$

Ennustevirheen (11.12) varianssi $Var(u_{t+i})$ voi olla pieni tai suuri, mutta tällä seikalla ei ole mallin dynamiikan kannalta merkitystä, jos malli on lineaarinen. Diskreetti rationaalisten odotusten makromalli oletetaan yleensä lineaariseksi. Tällöin odotettu arvo muuttujien painotetusta summasta (= lineaariyhdisteestä) on yhtä kuin painotettu summa (= lineaariyhdiste) muuttujien odotetuista arvoista:

$$E_t \sum_{h=1}^{H} \alpha_h z_{ht} = \sum_{h=1}^{H} \alpha_h E_t z_{ht}, \tag{11.14}$$

missä $z_1, ..., z_H$ ovat eri muuttujia ja z_{ht} on muuttujan z_h arvo periodilla t. Omi-naisuuksien (11.11)-(11.14) nojalla rationaalisten odotusten makromallit voidaan ratkaista.

11.5 Sovellus III: rationaalisten odotusten heikko versio

Vahvassa versiossa (vrt. sovellus II, kappale (11.3) edellä) oletettiin, että kaikki talousyksiköt arvaavat tulevan kehityksen oikein. Heikossa versiossa rationaaliset odotusten teoria tehdään realistisemmiksi ottamalla huomioon myös erehtymisen mahdollisuus ja erot yksilöiden välillä. Se perustuu seuraaviin oletuksiin:

(a) Yleisö *ei tee systemaattisia ennustevirheitä*, ainakaan pitkällä aikavälillä. Tällöin yleisön subjektiiviset odotukset vastaavat todellista kehitystä vaikka ennustevirheestä johtuva epätarkkuus voi olla suuri. Kukin talousyksikkö ennustaa tulevaa kehitystä oman mallinsa avulla. Jos tämä malli on epätarkka, niin ennustevirheen hajonta on suuri, vaikka ennustevirheen keskiarvo olisikin (likimäärin) nolla. Jos malli on tarkka, niin ennustevirheen hajonta on pieni.

Esim. Odotettu hintakehitys = todellinen hintakehitys + ennustevirhettä kuvaava virhetermi, jonka odotusarvo on nolla. Asiantuntijalla tämän virhetermin varianssi on pieni ja ei-asiantuntijalla suuri. Tällöin talousyksiköt eivät systemaattisesti yli- tai aliarvioi hintakehitystä, vaan erehtyvät satunnaisesti kumpaankin suuntaan: virhetermi on satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo = 0.

(b) Kaikki *oleellinen ennusteissa tarvittava informaatio on julkista.* Tällöin yleisön ennusteen odotusarvo on sama kuin talouspolitiikan harjoittajan odotusarvo. Mikäli informaatio olisi maksullista, niin silloin olisi olemassa sisäpiiri, joka tekisi oleellisesti erilaisia ennusteita kuin muu yleisö.

Laajennetaan nyt kappaleen (11.3) malli heikoksi versioksi. Määritelmän (11.12) nojalla muuttujan r todellinen arvo nykyisellä tai tulevalla periodilla on yhtä kuin saman muuttujan odotettu arvo plus yleisön ennustevirheestä aiheutuva häiriötermi:

$$r_{t+j} = E_t r_{t+j} + u_{t+j} \quad \text{kun} \quad j > 0.$$

Satunnaismuuttujiin u_{t+j} voidaan suhtautua kuten eksogeenisiin muuttujiin ja muuten soveltaa samaa ratkaisutapaa kuin edellä. Sijoittamalla tämä yhtälöön (11.10) ja olettamalla T on riittävän suureksi saadaan seuraava yleinen ratkaisu:

$$p_t = g \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i [E_t r_{t+i+1} + u_{t+i+1}] + C\mu^{-t} = \hat{p}_t + v_t. \tag{11.15}$$

Ottamalla yhtälöstä (11.15) odotusarvo saadaan

$$\hat{p}_t = \eta \sum_{i=0}^{T-1} (1-\eta)^i E_t r_{t+i+1} + C(\frac{1}{1-\eta})^t, \qquad v_t \equiv \eta \sum_{i=0}^{T-1} (1-\eta)^i u_{t+i+1}.$$

Täten jos yleisö luottaa vakaaseen kehitykseen, $C = 0$, niin tämän hetken odotettu inflaatio $E_t p_t$ määräytyy rahamäärän odotetun kasvunopeuden $E_t r_{t+1}$, $E_t r_{t+2}, ...$ perusteella. Koska $E_t u_{t+i} = 0$ positiivisilla i:n arvoilla ja

$$E_t v_t = \eta \sum_{i=0}^{T-1} (1-\eta)^i E_t u_{t+i} = 0,$$

niin yhtälön (11.15) nojalla inflaatio p_t heilahtelee satunnaisesti odotetun arvonsa $E_t p_t$ molemmin puolin.

Samanlainen laajennus saadaan myös Calvo palkoille. Tällöin yhtälössä (11.15) u_t on työmarkkinajäjestöjen ennustevirhe tulevan hintakehityksen arvioinnissa. Mikäli työmarkkinajärjestöt luottavat kehityksen vakauteen, niin tulos on seuraava. Kansantalouden keskimääräinen nimellispalkka p_t heittelehtii odotetun arvonsa $E_t p_t$ molemmin puolin ja tämä odotettu arvo on funktio odotetusta hintakehityksestä $E_t r_{t+1}, E_t r_{t+2}, ...$

11.6 Toisen asteen systeemit

Siirrymme nyt tarkastelemaan systeemiä, joka voidaan ilmaista toisen asteen differenssiyhtälönä. Olkoon y edelleen endogeeninen ja x eksogeeninen muuttuja sekä kaikki muut symbolit parametreja. Tällainen systeemi voi olla joko pelkästään taaksepäin katsova

$$y_t = bx_t + \lambda_1 y_{t-1} + \lambda_2 y_{t-2},$$

jolloin ratkaisu määräytyy (11.3):n tapaan muuttujien menneiden arvojen perusteella, pelkästään eteenpäin katsova

$$y_t = gx_t + \mu_1 y_{t+1} + \mu_2 y_{t+2},$$

jolloin ratkaisu määräytyy (11.6):n tapaan muuttujien tulevien arvojen perusteella, tai sekä eteen- että taaksepäin katsova:

$$y_t = ax_t + \lambda y_{t-1} + \mu y_{t+1}. \tag{11.16}$$

Kuten kappaleessa (11.1) osoitettiin, ensimmäisen asteen systeemit ovat joko taakse- tai eteenkatsovia. Toisen asteen systeemi, joka on joko pelkästään eteenpäin tai pelkästään taaksepäin katsova, johtaa kyllä monimutkaisempaan malliin kuin vastaava ensimmäisen asteen systeemi, mutta tuloksen eivät juuri laadullisesti poikkea vastaavien ensimmäisten asteen systeemien ratkaisuista. Taloustieteilijän kannalta mielenkiintoinen tapaus on sekä eteen- että taaksepäinkatsova systeemi (11.16), jossa endogeenisen muuttujan mennyt arvo y_{t-1} otetaan annettuna, mutta tuleva arvo y_{t+1} määräytyy mallin tasapainoehdoista ja on siten mallin eksogeenisten muuttujien funktio.

Yhtälön (11.16) ratkaisu koostuu erityisratkaisusta ja vastaavan homogeenisen yhtälön yleisestä ratkaisusta. Erityisratkaisu on painotettu keskiarvo eksogeenisen muuttujan menneistä, nykyisistä ja tulevista arvoista:

$$\bar{y}_t = \alpha\Big[x_t + \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i x_{t+i} + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i x_{t-i}\Big], \tag{11.17}$$

missä parametrit α, β ja γ ratkaistaan parametrien a, λ ja μ funktioina kokeilemalla kehitelmää (11.17) yhtälöön (11.16). Sijoittamalla $y_t = k^t$ homogeeniseen yhtälöön $y_t = \lambda y_{t-1} + \mu y_{t+1}$ saadaan karakteristinen yhtälö $\mu k^2 - k + \lambda = 0$, josta ratkaistaan juuret

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda\mu}}{2\mu}, \qquad k_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda\mu}}{2\mu}. \tag{11.18}$$

Tällöin homogeenisen yhtälön ratkaisuksi tulee $C_1 k_1^t + C_2 k_2^t$, missä C_1 ja C_2 ovat vakioita. Yhdessä erityisratkaisun (11.17) kanssa yhtälön (11.16) yleiseksi ratkaisuksi tulee

$$y_t = \alpha\Big[x_t + \sum_{i=1}^{\infty} \beta^i x_{t+i} + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i x_{t-i}\Big] + C_1 k_1^t + C_2 k_2^t. \tag{11.19}$$

Jos molemmat juuret (11.18) ovat itseisarvoltaan suurempia kuin yksi, $|k_1| > 1$ ja $|k_2| > 1$, systeemi on globaalisti epästabiili: lähdettiimpä mistä pisteestä tahansa fundamentaalin (11.17) ulkopuolelta, systeemi erkaantuu fundamentaalista yhä kauemmas. Tällaista mallia ei voida käyttää, koska mikä tahansa shokki, joka suistaa systeemin ulos fundamentaalilta, johtaa täysin ennustamattomaan käyttäytymiseen. Jos $|k_1| < 1$ ja $|k_2| < 1$, systeemi on globaalisti stabiili. Tällöin vakiot C_1 ja C_2 voidaan ratkaista käyttämällä alkuarvoja y_{t-1} ja y_{t-2}, jotka tunnetaan. Kuten osoitimme jatkuvassa tapauksessa aikaisemmin, rationaalisten odotusten malleissa globaalisti stabiilia ratkaisua ei voida käyttää, koska se ei johda yksikäsitteiseen ratkaisuun: systeemi päätyy aina fundamentaalille valittiinpa vakiot C_1 ja C_2 miten hyvänsä. Näin ollen rationaalisten odotusten malleissa tulokset ovat järkeviä vain, jos toinen juurista (11.18) on itseisarvoltaan suurempi ja toinen itseisarvoltaan pienempi kuin yksi. Valitsemalla epästabiilia juurta $|k_i| > 1$ vastaava vakio C_i nollaksi saadaan *satulapisteratkaisu.* Tämä vastaa tilannetta, jossa yleisö luottaa kehityksen vakauteen. Toinen vakioista C_j ($j \neq i$) ratkaistaan sen perusteella, että y_{t-1} tunnetaan. Näin ollen molemmille vakioille C_1 ja C_2 saadaan yksikäsitteinen arvo, joten systeemin kehitys on yksikäsitteistä.

12 Sovellus: limittäiset sopimukset

12.1 Taustaa

Miten ratkaistaan teoreettisesti se, että makromallissa palkkojen tulisi olla lyhyellä aikavälillä jäykkiä, mutta pitkällä aikavälillä joustavia? Fischerin ja Taylorin ratkaisuna tähän ongelmaan oli työehtosopimusten limittyminen: tiettynä ajankohtana osa työehtosopimuksista raukeaa, mutta osa pysyy edelleenkin voimassa. Tällöin palkat joustavat raukeavien sopimusten osalta, mutta pysyvät kiinteinä niillä aloilla, joilla sopimukset ovat voimassa. Pitkällä aikavälillä kaikki sopimukset raukeavat, joten palkat tulevat täysin joustaviksi.

12.2 Malli

Muodostamme ensin pohjaksi makromallin. Olkoon P_t hintataso, W_t palkkataso, Q_t tuotanto, M_t rahan tarjonta (= kierrossa olevan rahamäärä), $\frac{W_t}{P_t}$ reaalipalkka ja P_tQ_t nimellistulot periodilla t. Määrittelemme vastaavan pienen kirjaimen tarkoittamaan logaritmimuunnosta: $p_t = \log P_t$, $w_t = \log W_t$, $q_t = \log Q_t$ and $m_t = \log M_t$. Tällöin reaalipalkka logaritmisena on $\log(\frac{W_t}{P_t}) = w_t - p_t$ ja nimellistulot logaritmisena ovat $\log(P_tQ_t) = p_t + q_t$. Kirjoitamme mallin yhtälöt yksinkertaisuuden vuoksi logline-aariseen muotoon (= lineaarisiksi logaritmimuunnosten suhteen) ja merkitsemme parametreja kreikkalaisilla kirjaimilla.

Eliminoidaksemme koron mallista oletamme, että yleisö pitää rahaa vakiosuhteessa nimellistuloihinsa. Valitsemalla rahan mittayksikkö sopivasti tämän vakiosuhde saadaan ykköseksi, joten $M_t = P_tQ_t$. Kirjoittamalla tämä loglineaariseen muotoon ja ottamalla lisäksi huomioon rahan hallussapitopäätösten epävarmuus saadaan

$$m_t = \log M_t = \log(P_tQ_t) + v_t = p_t + q_t + v_t, \quad E_t v_{t+i} = 0 \text{ kun } i > 0, \tag{12.1}$$

missä v_t on yleisön ennustevirhe. Voitonmaksimoinnin 1. asteen ehdon nojalla reaalipalkan $\frac{W_t}{P_t}$ aleneminen lisää tuotantoa Q_t. Ottamalla huomioon lisäksi tuotantopäätösten epävarmuus saamme tämän riippuvuuden loglineaariseen muotoon

$$\begin{aligned} q_t &= \log Q_t = -\beta \log(\frac{W_t}{P_t}) + u_t = \beta[p_t - w_t] + u_t, \qquad (12.2) \\ \beta &> 0, \quad E_t u_{t+i} = 0 \text{ kun } i > 0, \end{aligned}$$

missä u_t on yleisön ennustevirhe ja β on hyödykkeiden kokonaistarjonnan jousto reaalipalkan suhteen:

$$\begin{aligned} \beta &= \left| \frac{dq_t}{d(w_t - p_t)} \right| = -\frac{dq_t}{d(w_t - p_t)} = -\frac{d \log Q_t}{d \log(\frac{W_t}{P_t})} = -\frac{d \log Q_t}{d(\frac{W_t}{P_t})} \Big/ \frac{d \log(\frac{W_t}{P_t})}{d(\frac{W_t}{P_t})} \\ &= -\frac{dQ_t}{d\frac{W_t}{P_t}} \frac{\frac{W_t}{P_t}}{Q_t}. \end{aligned}$$

Lopuksi määrittelemme, että keskuspankki sopeuttaa rahamäärän M_t hintatasoon P_t seuraavan säännön mukaisesti:

$$\begin{aligned} m_t = \log M_t = \alpha \log P_t + z_t &= \alpha p_t + z_t, \qquad (12.3) \\ & 0 < \alpha < 1, \quad E_\tau z_{\tau+i} = 0 \text{ kun } i > 0, \end{aligned}$$

missä z_t on yleisön ennustevirhe. Sääntö (12.3) kuvaa keskuspankin tyypillistä reaktioita hintatason P_t muutoksiin, ja yleisö oppii tuntemaan tämän säännön kokemuksensa kautta. Parametria α voidaan käyttää rahapolitiikan kireyden mittarina: jos $\alpha \to 0$, keskuspankki pitää kiinni rahamäärätavoitteestaan ja rahapolitiikka on kireää; ja jos $\alpha \to 1$, keskuspankki ei välitä pitää rahamäärää vakaana, joten rahapolitiikka on löysää.

Työmarkkinoiden rakenne oletetaan seuraavanlaiseksi. Työehtosopimukset ovat voimassa kaksi periodia ja ne neuvotellaan aina ensimmäisen periodin alussa. Kansantaloudessa on olemassa kaksi yhtäsuurta työntekijäryhmää, joista toinen tekee sopimukset aina *parittomina* ja toinen aina *parillisina* periodeina. Tämä on yksinkertaisin mahdollinen versio Fischerin ja Taylorin mallista.[6] Tapauksissa, joissa (a) periodeja on useampia kuin kaksi, (b) työntekijäryhmät ovat erisuuria tai (c) työehtosopimukset kestävät yli kaksi periodia, saadaan samanlaisia tuloksia, mutta laskelmat ovat monimutkaisempia. Oletamme, että työmarkkinajärjestöt yrittävät pitää jäsentensä reaalipalkan vakiona. Valitsemalla työn mittayksikkö sopivasti täksi vakioksi saadaan ykkönen, joten työmarkkinajärjestöjen tavoitepalkka on sama kuin hintataso. Koska kuitenkin palkat sovitaan kahdeksi periodiksi, hetkellä t esitetyt palkkavaatimukset (logaritmisena) a_t ovat keskiarvo saman periodin hintatasosta p_t ja seuraavan periodin odotetusta hintatasosta $E_t p_{t+1}$:[7] $a_t = \frac{1}{2}[p_t + E_t p_{t+1}]$. Koska periodina t tehdään vain puolet palkkasopimuksista, mutta puolet näistä periytyy edelliseltä periodilta, kansantalouden keskipalkaksi (logaritmisena) tulee

$$w_t = \frac{1}{2}[a_t + a_{t-1}] = \frac{1}{4}[p_t + E_t p_{t+1} + p_{t-1} + E_{t-1} p_t]. \qquad (12.4)$$

12.3 Mallin ratkaiseminen

Nyt yhtälöistä (12.1)-(12.3) saadaan

$$\beta[p_t - w_t] + u_t =^{(12.2)} q_t =^{(12.1)} m_t - p_t - v_t =^{(12.3)} (\alpha - 1)p_t - v_t + z_t,$$

mistä ratkaistaan hintataso p_t:

$$p_t = \frac{\beta w_t}{\beta + 1 - \alpha} + \frac{z_t - u_t - v_t}{\beta + 1 - \alpha}. \qquad (12.5)$$

[6] Mallia on myös yksinkertaistettu siten, että reaalipalkkatavoite ei riipu työllisyydestä.

[7] Itse asiassa tavoitepalkan täytyisi muodostua nykyisestä hintatasosta p_t ja tulevasta odotetusta hintatasosta $E_t p_{t+1}$ *diskontattuna* nykyhetkeen $\theta E_t p_{t+1}$: $a_t = \frac{1}{2}[p_t + \theta E_t p_{t+1}]$. Jos periodin pituus (ja siten myös sopimuskausi) on riittävän lyhyt, niin diskonttotekijä θ voidaan olettaa likimäärin ykköseksi. Tulokset on helppo yleistää tapaukseen, jossa periodit (ja sopimuskaudet) ovat pitkiä: $\theta < 1$.

Ottamalla huomioon, että satunnaismuuttujien z_{t+1}, u_{t+1} ja v_{t+1} odotusarvot ovat nollia, saadaan

$$E_{t-1}p_t = \frac{\beta w_t}{\beta + 1 - \alpha}, \quad E_t p_{t+1} = \frac{\beta w_{t+1}}{\beta + 1 - \alpha}. \tag{12.6}$$

Sijoittamalla (12.5) ja (12.6) yhtälöön (12.4) saamme palkalle w_t toisen asteen differenssiyhtälön

$$\begin{aligned}
w_t &= \frac{1}{4}[p_t + E_t p_{t+1} + p_{t-1} + E_{t-1}p_t] \\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{\beta w_t}{\beta+1-\alpha} + \frac{z_t - u_t - v_t}{\beta+1-\alpha} + \frac{\beta w_{t+1}}{\beta+1-\alpha} + \frac{\beta w_{t-1}}{\beta+1-\alpha} \\
&\quad + \frac{z_{t-1} - u_{t-1} - v_{t-1}}{\beta+1-\alpha} + \frac{\beta w_t}{\beta+1-\alpha}\Big] \\
&= \frac{\beta}{4(\beta+1-\alpha)}[2w_t + w_{t+1} + w_{t-1}] \\
&\quad + \frac{1}{4(\beta+1-\alpha)}[z_t - u_t - v_t + z_{t-1} - u_{t-1} - v_{t-1}].
\end{aligned}$$

Kertomalla molemmat puolet termillä $2(\beta + 1 - \alpha)$ saamme

$$[2\beta + 4(1-\alpha)]w_t = \beta[w_{t+1} + w_{t-1}] + z_t - u_t - v_t + z_{t-1} - u_{t-1} - v_{t-1}.$$

Tästä ratkaisemme yhtälön, joka on samaa muotoa kuin edellisen monisteen yhtälö (11.16):

$$w_t = \frac{\beta}{2\beta + 4(1-\alpha)}[w_{t+1} + w_{t-1}] + x_t, \quad E_\tau x_{t+i} = 0 \text{ for } i > 0, \tag{12.7}$$

missä

$$x_t \equiv \frac{1}{2\beta + 4(1-\alpha)}[z_t - u_t - v_t + z_{t-1} - u_{t-1} - v_{t-1}]$$

on satunnaismuuttujien painotettuna summana satunnaismuuttuja. Saatu systeemi (12.7) on *sekä eteen- että taaksepäinkatsova*. Tämä johtuu siitä, että osalle palkansaajia sopimukset ovat voimassa, mutta osalle ne erääntyvät.

Edellisen monisteen ratkaisun (11.19) nojalla yhtälön (12.7) erityisratkaisu $\bar{w}_t$ on painotettu summa satunnaismuuttujan x_t menneistä, nykyisistä ja tulevista arvoista ja siten itse satunnaismuuttuja. Näin ollen systeemin (12.7) ratkaisu on muotoa

$$w_t = \bar{w}_t + C_1 k_1^t + C_2 k_2^t, \tag{12.8}$$

missä k_1 ja k_2 ovat vastaavan homogeenisen yhtälön

$$w_t = \frac{\beta}{2\beta + 4(1-\alpha)}[w_{t+1} + w_{t-1}]. \tag{12.9}$$

juuret. Sijoittamalla homogeeniseen yhtälöön (12.9) $w_t = k^t$ saadaan karakteristinen yhtälö

$$k^2 - 2\Big(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)k + 1 = 0,$$

jonka juuret ovat

$$
\begin{aligned}
k_{1,2} &= 1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\Big(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2 - 4} \\
&= \frac{1-\alpha}{\beta} \pm \sqrt{(\Big(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2 - 1}.
\end{aligned}
$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta} + \sqrt{\Big(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2 - 1} > 1, \\
k_2 &= 1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta} - \sqrt{\Big(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2 - 1} \\
&> 1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta} - \sqrt{\Big(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2} = 0, \\
k_2 &= 1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta} - \sqrt{\Big(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2 - 1} < 1 \\
&\Leftrightarrow 2\frac{1-\alpha}{\beta} < \sqrt{\Big(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2 - 1} \\
&\Leftrightarrow 4\Big(\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2 < \Big(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2 - 1 = 1 + 4\Big(\frac{1-\alpha}{\beta}\Big)^2 + 4\Big(\frac{1-\alpha}{\beta}\Big) - 1 \\
&\Leftrightarrow 0 < 4\Big(\frac{1-\alpha}{\beta}\Big) \quad \text{mikä pitää paikkansa, koska } \alpha < 1.
\end{aligned}
$$

Koska juuri $k_1 > 1$ on epästabiili ja juuri $0 < k_2 < 1$ on stabiili, systeemillä (12.7) on satulapisteratkaisu.

12.4 Ratkaisun muuntaminen tulkittavaan muotoon

Jos oletamme, että yleisö luottaa kehityksen vakauteen, voimme eliminoida pois kuplat valitsemalla epästabiilia juurta vastaavan kertoimen nollaksi: $C_1 = 0$. Tällöin yhtälö (12.7) tulee muotoon

$$
w_t = \bar{w}_t + C_2 k_2^t. \tag{12.10}
$$

Stabiilia juurta vastaava kerroin C_2 voidaan ratkaista käyttämällä hyväksi sitä, että hetkellä t tunnetaan aina edellisen periodin palkka w_{t-1}. Siirtämällä yhtälöä (12.10) periodi taaksepäin saadaan

$$
w_{t-1} = \bar{w}_{t-1} + C_2 k_2^{t-1},
$$

Ratkaistaan tästä vakio

$$
C_2 = \frac{1}{k_2^{t-1}}[w_{t-1} - \bar{w}_{t-1}],
$$

ja sijoitetaan se yhtälöön (12.10). Tällöin saamme systeemin (12.7) lopulliseksi ratkaisuksi alkuarvolla w_{t-1}:

$$w_t = k_2 w_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad E_\tau \varepsilon_{\tau+i} = 0 \text{ kun } i > 0, \tag{12.11}$$

missä $\varepsilon_t \equiv \bar{w}_t - k_2 \bar{w}_{t-1}$ on satunnaismuuttujien summana satunnaismuuttuja sekä

$$0 < k_2 = 1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta} - \sqrt{\left(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\right)^2 - 1} < 1. \tag{12.12}$$

Yhtälö (12.11) voidaan periaatteessa estimoida palkkasarjan avulla. Tällöin stabiili juuri k_2 osoittaa sen, missä määrin palkat ovat sarjaan korreloituneita.

12.5 Palkkojen kehitys

Nyt tarkastelemme ratkaisun (12.11) tulkintaa. Ensiksi havaitsemme, että nimellispalkat ovat jäykkiä: koska $k_2 > 0$, palkat ovat sarjaan korreloituneita eli korkea (matala) palkka tällä periodilla t ennustaa myös korkeaa (matalaa) palkkaa seuraavalla periodilla t. Tämän johtuu siitä, että vain osa palkoista pystyy heti (so. samalla periodilla) reagoimaan eksogeeniseen muutokseen. Mikäli tällaista taloutta kohtaa shokki, palkkojen kehitys seuraa viiveellä hintojen kehitystä ja reaalipalkkataso poikkeaa pitkän aikavälin tasoltaan, kunnen uusi tasapaino on saavutettu.

Nimellispalkkatason muutos voidaan määritellä seuraavasti:

$$\Delta w_t \equiv w_t - w_{t-1} = \log W_t - \log W_{t-1} = \log \frac{W_t}{W_{t-1}}. \tag{12.13}$$

Oletetaan ensiksi, että keskuspankki harjoittaisi äärimmäisen löysää rahapolitiikkaa:
$\alpha \to 1 - \beta$. Tällöin juuri (12.12) tulee muotoon $k_2 \to 1$, eli systeemillä onkin yksikköjuuri: edellisen periodin palkka selittää täysin seuraavan periodin palkan. Määritelmän (12.13) perusteella tämä malli ei enää selitäkään nimellispalkkojen kehitystä tasona, vaan nimellispalkkatason muutos on satunnaismuuttuja:

$$\Delta w_t = w_t - w_{t-1} = \varepsilon_t.$$

Tulkinta on seuraava. Jos keskuspankki sopeuttaisi rahan tarjonnan riittävän ripeästi rahan kysynnän muutoksiin, niin hintatason muutos ei pääsisi vaikuttamaan rahan reaaliseen tarjontaan ja siten koko kansantalouden tasapainoon millään tavalla. Tällöin sen enempää hintatasolla kuin palkkatasolla ei olisi mitään vaikutusta talouden kehitykseen, vaan ainoastaan näiden muutoksilla. Tällaisessa tapauksessa hinta- ja palkkataso olisi äärimmäisen epävakaa. Täten talouden vakauden ylläpitämiseksi keskuspankin sopeuttamisen tulee aina olla riittävän jäykkää, $\alpha < 1 - \beta$, mistä seuraa $k_2 < 1$.

Derivoimalla funktio (12.12) saamme negatiivisen riippuvuuden juuren k_2 ja osamäärän $\frac{1-\alpha}{\beta}$ välille:

$$\frac{dk_2}{d(\frac{1-\alpha}{\beta})} = 2 - \frac{2\left(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{\sqrt{\left(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\right)^2 - 1}} < 2 - \frac{2\left(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\right)}{\sqrt{\left(1 + 2\frac{1-\alpha}{\beta}\right)^2}} = 0.$$

Nyt jos keskuspankki päättää soveltaa kireämpää rahapolitiikkaa kuin aikaisemmin, α laskee, $\frac{1-\alpha}{\beta}$ nousee ja k_2 laskee. Tällöin palkkojen joustavuus lisääntyy: edellisen periodin palkkataso w_{t-1} ennustaa huonommin seuraavan periodin palkkatasoa w_t. Tulkinta on seuraava. Kireä rahapolitiikka panee hintatason reagoimaan voimakkaammin talouden shokkeihin. Tällöin työmarkkinajärjestöjen on joustettava enemmän nimellispalkkoja, jotta ne pystyisivät shokin jälkeen pitämään reaalipalkat vakaina.

Oletetaan nyt, että hyödykkeiden kokonaistarjonta tulee joustamattomammaksi reaalipalkan suhteen eli yhtälössä (12.2) β pienenee. Tällöin $\frac{1-\alpha}{\beta}$ kasvaa ja k_2 pienenee, joten nimellispalkkojen joustavuus lisääntyy. Tulkinta on samanlainen kuin edellä. Jos kokonaistarjonta on joustamatonta, hintatason on reagoitava voimakkaammin talouden shokkeihin. Tällöin työmarkkinajärjestöjen on joustettava enemmän nimellispalkkoja, jotta ne pystyisivät shokin jälkeen pitämään reaalipalkat vakaina.

12.6 Tuotannon ja hintatason kehitys

Jos palkkataso w_t on annettu, raha- ja hyödykemarkkinoiden tasapainoehtojen (12.1) ja (12.2) sekä keskupankin reaktiofunktion (12.3) avulla voidaan simultaani-sesti ratkaista hintataso p_t, kansantuote q_t ja rahan tarjonta m_t. Nämä yhtälöt voidaan muuntaa muotoon

$$(1-\alpha)p_t + q_t + v_t - z_t = 0, \qquad \beta p_t - q_t + u_t - \beta w_t = 0.$$

Tästä ratkaistaan reaalinen bruttokansantuote q_t ja nimellishintataso p_t:

$$\begin{aligned} q_t &= \tfrac{(\alpha-1)\beta w_t}{\beta+1-\alpha} + \epsilon_t^q, \qquad E_\tau \epsilon_{\tau+i}^q = 0 \text{ kun } i > 1, && (12.14) \\ p_t &= \tfrac{\beta w_t}{\beta+1-\alpha} + \epsilon_t^p, \qquad E_\tau \epsilon_{\tau+i}^p = 0 \text{ kun } i > 1, && (12.15) \end{aligned}$$

missä satunnaismuuttujat on määritelty

$$\epsilon_t^q \equiv \frac{(1-\alpha)u_t + \beta(z_t - v_t)}{\beta+1-\alpha}, \quad \epsilon_t^p \equiv \frac{z_t - u_t - v_t}{\beta+1-\alpha}.$$

Koska yhtälössä (12.14) $\frac{(\alpha-1)\beta w_t}{\beta+1-\alpha} < 1$, reaalinen bkt q_t korreloi negatiivisesti palkkatason w_t suhteen; ja koska yhtälössä (12.15) $0 < \frac{\beta}{\beta+1-\alpha} < 1$, hintataso p_t korreloi positiivisesti palkkatason w_t suhteen, mutta kuitenkin niin, että palkkatason nousu ei heti kokonaan siirry hintoihin. Täten siis hintataso p_t muuttuu samaan ja tuotanto q_t vastakkaiseen suuntaan kuin saman periodin palkkataso w_t. Tulkinta on ilmeinen. Koska työmarkkinajärjestöt pyrkivät pitämään reaalipalkat vakaina, hintatason ja nimellispalkkatason välillä on positiivinen riippuvuus. Korkeat palkat nostavat tuotantokustannuksia ja supistavat tuotantoa. Relaatiot (12.14) ja (12.15) voidaan periaatteessa estimoida hinta-, tuotanto- ja palkkasarjoista.

13 Lineaarioperaattoreiden käyttö dynaamisissa malleissa

13.1 Taustaa

Lineaaristen differentiaali- ja differenssiyhtälöiden käsittelyä voidaan helpottaa käyttämällä lineaarioperaattoreita. Jos esimerkiksi haluamme ratkaista differentiaaliyhtälön

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

tämän voi kirjoittaa muotoon

$$(aD^2 + bD + c)y = 0.$$

Tämän jälkeen operaattoria D käsitellään tuntemattomana suureena ja ratkaistaan algebrallinen yhtälö $aD^2 + bD + c = 0$. Jos tämän algebrallisen yhtälön juuret ovat λ_1 ja λ_2, funktiot e^{λ_1} ja e^{λ_2} ovat differentiaaliyhtälön ratkaisuja ja sen yleinen ratkaisu on $A_1e^{\lambda_1} + A_2e^{\lambda_2}$, missä A_1 ja A_2 ovat vakioita. Tätä samaa periaatetta voidaan soveltaa myös differenssiyhtälöön

$$ay_{t-2} + by_{t-1} + cy_t = 0,$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$(aE^2 + bE + c)y = 0.$$

Tämän jälkeen operaattoria E käsitellään tuntemattomana suureena ja ratkaistaan algebrallinen yhtälö $aE^2 + bE + c = 0$. Jos tämän algebrallisen yhtälön juuret ovat k_1 ja k_2, funktiot k_1^t ja k_2^t ovat differenssiyhtälön ratkaisuja ja sen yleinen ratkaisu on $A_1k_1^t + A_2k_2^t$, missä A_1 ja A_2 ovat vakioita.

13.2 Lineaarioperaattoreiden perusominaisuuksia

Koska dynaamisissa taloudellisissa malleissa muuttujat ovat aina reaalisia, voimme rajoittua tarkastelemaan vain sellaisia operaattoreita, jotka on määritelty reaaliavaruudessa $\mathcal{R}$. Näin ollen määrittelemme *lineaarioperaattorin* T kuvaukseksi $T : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, joka tyydyttää seuraavat ominaisuudet:

(a) $T(\alpha x) = \alpha Tx$, missä α on skalaari (vakio) ja $x \in \mathcal{R}$;

(b) $T(x + y) = Tx + Ty$, missä $x \in \mathcal{R}$ ja $y \in \mathcal{R}$.

Toisin sanoen: (a) jos operaattoria T sovelletaan termiin αx, niin vakio α voidaan ottaa operaattorin eteen; ja (b) jos operaattoria T sovelletaan summaan $x + y$, niin operaattori voidaan hajoittaa yli tämän summan. Näistä kahdesta ominaisuudesta seuraa, että lineaarioperaattori T voidaan hajoittaa yli lineaariyhdisteen (so. painotetun keskiarvon, ml. negatiiviset painot):

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \qquad x, y \in \mathcal{R},\ \alpha \text{ ja } \beta \text{ ovat skalaareja.}$$

Mikäli lineaarioperaattori T on bijektio, sille voidaan määritellä *käänteisoperaattori* T^{-1}, joka toteuttaa ehdon $T^{-1}Tx = x$ (so. operaattoria T^{-1} sovelletaan muuttujaan Tx). Määritelmien (a) ja (b) avulla voidaan helposti osoittaa, että myös tämä käänteisoperaattori T^{-1} on lineaarioperaattori. Edelleen jos $T^{-1}Tx = x$ pätee, niin myös $TT^{-1}x = x$ on voimassa: tekemällä yhtälölle $T^{-1}Ty = y$ molemmin puolin operaatio T saadaan $TT^{-1}Ty = Ty$ ja määrittelemällä muuttuja $x = Ty$ saadaan $TT^{-1}x = x$.

Lineaarioperaattorit ovat hyödyllisiä apuvälineitä silloin, kun pitää tutkia monimutkaisia systeemejä: niiden avulla voidaan laskelmia lyhentää ja oikoa. Jos jokin matemaattinen operaatio voidaan osoittaa lineaarioperaattoriksi, niin silloin sitä voidaan käsitellä erikseen melko pitkälle samaan tapaan kuin miten reaalilukuja käsitellään. Tällöin on vain muistettava, että *lineaarioperaattori ei voi olla olemassa ilman muuttujaa, johon sitä sovelletaan.* Mm. seuraavat matemaattiset operaatiot voidaan edellä olevien määritelmien (a) ja (b) avulla osoittaa lineaarioperaattoreiksi:

(i) vakiolla α kertominen (käänteisoperaattori: vakiolla $\frac{1}{\alpha}$ kertominen);

(ii) derivointi, ks. kappale 4;

(iii) integrointi;

(iv) kahden lineaarioperaattorin U ja V tulo, $Tx = UVx$ (käänteisoperaattori: $T^{-1}x = V^{-1}U^{-1}x$);

(v) kahden lineaarioperaattorin U ja V summa, $Tx = (U + V)x$ (käänteisoperaattori: $T^{-1}x = (U + V)^{-1}x$).

On huomattava, että ominaisuuksien (iv) ja (v) perusteella myös mielivaltaisen monen lineaarioperaattorin tulo tai summa on lineaarioperaattori.

Nyt johdamme seuraavan hyödyllisen tuloksen.

Tulos 1. *Olkoon $\alpha \neq 0$ vakio. Tällöin*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x = \frac{1}{1-\alpha} x,$$

missä yläindeksi i tarkoittaa potenssia.

TODISTUS: Vakiot α, $1 - \alpha$, $\frac{1}{1-\alpha}$ ovat lineaarioperaattoreita, vakioiden summa $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$ on lineaarioperaattori, ja lineaarioperaattoreiden $1 - \alpha$ ja $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$ tulo on lineaarioperaattori (vrt. kohdat (i) (iv) ja (v) yllä). Nyt koska ominaisuuden (b) nojalla

$$(1-\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i x = \alpha^0 x = x,$$

niin saadaan

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x = \frac{1}{1-\alpha} (1-\alpha) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i x = \frac{1}{1-\alpha} x. \qquad \square$$

Huom. Jos käsittelemme summaa $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i$ reaalilukuna, tulos

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{1}{1-\alpha}$$

pätee vain tapauksessa $-1 < \alpha < 1$, jossa ko. sarja suppenee. Jos $|\alpha| \geq 1$, ko. summa ei ole mikään reaaliluku vaan ääretön.

Toinen hyödyllinen aputulos on seuraava:

Tulos 2. *Olkoon T lineaarioperaattori sekä α ja β vakioita. Tällöin*

$$(1-\alpha T)^{-1}(1-\beta T)^{-1}x = \left[\frac{\alpha}{\alpha-\beta}(1-\alpha T)^{-1} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}(1-\beta T)^{-1}\right]x.$$

Todistus: Olkoon y muuttuja. Tällöin pätee

$$0 = \left[1 + \frac{\beta-\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha\beta-\beta\alpha}{\alpha-\beta}T\right]y = \left[1 + \frac{\beta}{\alpha-\beta}(1-\alpha T) - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(1-\beta T)\right]y.$$

Soveltamalla tähän operaatiota $(1-\alpha T)^{-1}$ saadaan

$$0 = \left[(1-\alpha T)^{-1} + \frac{\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(1-\alpha T)^{-1}(1-\beta T)\right]y.$$

Määrittelemällä uusi muuttuja $x = (1-\beta T)y$ saadaan $y = (1-\beta T)^{-1}x$ ja

$$\begin{aligned} 0 &= \left[(1-\alpha T)^{-1}(1-\beta T)^{-1} + \frac{\beta}{\alpha-\beta}(1-\beta T)^{-1} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(1-\alpha T)^{-1}\right]x \\ &= (1-\alpha T)^{-1}(1-\beta T)^{-1}x + \left[\frac{\beta}{\alpha-\beta}(1-\beta T)^{-1} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta}(1-\alpha T)^{-1}\right]x, \end{aligned}$$

mistä saadaan tulos. □

13.3 Viiveoperaattori ja siirto-operaattori

Tarkastelemme nyt diskreettiä systeemiä. Määrittelemme *viiveoperaattorin (lag operator)* L seuraavalla tavalla: $Lx_t = x_{t-1}$, missä x on muuttuja ja t periodi. Tällöin voimme myös merkitä

$$L^2 x_t = L(Lx_t) = Lx_{t-1} = x_{t-2}, \quad L^3 = Lx_{t-2} = x_{t-3}, \ \ldots, \ L^n = x_{t-n}.$$

Yleensä merkitään mukavuuden vuoksi $L^0 = 1$. On helppo osoittaa ominaisuuksien (a) ja (b) avulla, että viiveoperaattori L on lineaari-operaattori. Tällöin myös sen potenssit ovat lineaarioperaattoreiden tuloina lineaarioperaattoreita.

Määrittelemme *siirto-operaattorin (forward operator)* F seuraavalla tavalla: $Fx_t = x_{t+1}$, missä x on muuttuja ja t periodi. Tällöin voimme myös merkitä

$$F^2x_t = F(Fx_t) = Fx_{t+1} = x_{t+2}, \quad F^3 = Fx_{t+2} = x_{t+3}, \ \ldots, \ F^n = x_{t+n}.$$

Yleensä merkitään mukavuuden vuoksi $F^0 = 1$. On helppo osoittaa ominaisuuksien (a) ja (b) avulla, että siirto-operaattori F on lineaarioperaattori. Tällöin myös sen potenssit ovat lineaarioperaattoreiden tulona lineaarioperaattoreita. Siirto-operaattori F ja viiveoperaattori L ovat toistensa käänteisoperaattoreita: $F = L^{-1}$ ja $L = F^{-1}$.

Todistamme nyt seuraavat aputulokset:

Tulos 3. *Olkoon α vakio ja x muuttuja. Tällöin*

$$(1-\alpha L)^{-1}x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i L^i x_t \qquad \text{ja} \qquad (1-\alpha F)^{-1}x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i F^i x_t.$$

TODISTUS: Koska vakiolla α kertominen ja viiveoperaattori ovat molemmat lineaarioperaattoreita, joille on olemassa käänteisoperaattori, niin operaattoritulo αL ja operaattorien summa $(1-\alpha L)$ ovat lineaarioperaattoreita ja jälkimmäiselle on olemassa käänteisoperaattori $(1-\alpha L)^{-1}$. Edelleen koska

$$\begin{aligned}(1-\alpha L)\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i L^i x_t &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i L^i x_t - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i L^{i+1} x_t \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i L^i x_t - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{i+1} L^{i+1} x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i L^i x_t \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i L^i x_t = L^0 x_t = x_t,\end{aligned}$$

niin saamme $(1-\alpha L)\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i L^i x_t = x_t$. Tekemällä tämän molemmille puolille käänteisoperattorin $(1-\alpha L)^{-1}$ mukainen operaatio saamme edelleen

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i L^i x_t = (1-\alpha L)^{-1} x_t.$$

Koska F ja vakiolla kertominen ovat molemmat lineaarioperaattoreita, joille on olemassa käänteisoperaattori, niin operaattoritulo αF ja operaattorien summa $(1-\alpha F)$ ovat lineaarioperaattoreita ja jälkimmäiselle on olemassa käänteisoperaattori $(1-\alpha F)^{-1}$. Edelleen koska

$$\begin{aligned}(1-\alpha F)\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i F^i x_t &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i F^i x_t - \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i F^{i+1} x_t \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i F^i x_t - \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{i+1} F^{i+1} x_t \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i F^i x_t - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i F^i x_t = F^0 x_t = x_t,\end{aligned}$$

niin saamme $(1-\alpha F)\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i F^i x_t = x_t$. Tekemällä tämän molemmille puolille käänteisoperattorin $(1-\alpha F)^{-1}$ mukainen operaatio saamme edelleen

$$\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i F^i x_t = (1-\alpha F)^{-1}x_t. \qquad \square$$

Viive- ja siirto-operaattoreiden välillä on olemassa myös seuraava yhteys:

Tulos 4. *Olkoon α ja β vakioita sekä x muuttuja. Tällöin*

$$(1-\beta F)^{-1}x_t = -\frac{1}{\beta}(1-\frac{1}{\beta}L)^{-1}Lx_t \text{ ja } (1-\alpha L)^{-1}x_t = -\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{\alpha}F)^{-1}Fx_t.$$

TODISTUS: Tutkitaan väitöstä

$$(1-\beta F)^{-1}x_t = -\frac{1}{\beta}(1-\frac{1}{\beta}L)^{-1}Lx_t.$$

Tehdään vastaoletus

$$(1-\beta F)^{-1}x_t \neq -\frac{1}{\beta}(1-\frac{1}{\beta}L)^{-1}Lx_t.$$

Määritellään uusi muuttuja $y_t = (1-\beta F)^{-1}x_t$, jolloin $x_t = (1-\beta F)y_t$. Sijoittamalla tämä edelliseen epäyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} y_t &\neq -\frac{1}{\beta}(1-\frac{1}{\beta}L)^{-1}L(1-\beta F)y_t = -\frac{1}{\beta}(1-\frac{1}{\beta}L)^{-1}(L-\beta)y_t \\ &= (1-\frac{1}{\beta}L)^{-1}(1-\frac{1}{\beta}L)y_t = y_t \end{aligned}$$

eli $y_t \neq y_t$, mikä on mahdotonta. Siis vastaoletus on epätosi ja väitös tosi.

Tutkitaan väitöstä

$$(1-\alpha L)^{-1}x_t = -\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{\alpha}F)^{-1}Fx_t.$$

Tehdään vastaoletus

$$(1-\alpha L)^{-1}x_t \neq -\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{\alpha}F)^{-1}Fx_t.$$

Määritellään uusi muuttuja $y_t = (1-\alpha L)^{-1}x_t$, jolloin $x_t = (1-\alpha L)y_t$. Sijoittamalla tämä edelliseen epäyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} y_t &\neq -\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{\alpha}F)^{-1}F(1-\alpha L)y_t = -\frac{1}{\alpha}(1-\frac{1}{\alpha}F)^{-1}(F-\alpha)y_t \\ &= (1-\frac{1}{\alpha}F)^{-1}(1-\frac{1}{\alpha}F)y_t = y_t \end{aligned}$$

eli $y_t \neq y_t$, mikä on mahdotonta. Siis vastaoletus on epätosi ja väitös tosi. $\square$

13.4 Derivaattaoperaattori

Tarkastelemme nyt jatkuvaa dynaamista systeemiä. Määrittelemme derivaattaoperaattorin D muuttujan derivaataksi ajan t suhteen: $Dx = \frac{dx}{dt}$. Ominaisuuksien (a) ja (b) perusteella derivaattaoperaattori on helppo osoittaa lineaarioperaattoriksi, mutta ongelmana on, että sille ei yleensä löydy suoraa käänteisoperaattoria D^{-1}. Onneksi lineaarinen differentiaaliyhtälö voidaan kuitenkin lähes aina ratkaista seuraavan tuloksen avulla:

Tulos 5. *Jos α on vakio, x on jatkuva muuttuja, ja jos integroitava termi suppenee, niin operaattorin $(D - \alpha)$ käänteisoperaattori määritellään jommalla kummalla seuraavista tavoista:*

$$(D - \alpha)^{-1}x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-s)}x(s)ds \quad \text{tai} \tag{13.1}$$

$$(D - \alpha)^{-1}x(t) = -\int_{t}^{\infty} e^{\alpha(t-s)}x(s)ds. \tag{13.2}$$

Todistus: Tehdään tulokselle (13.1) vastaoletus

$$(D - \alpha)^{-1}x(t) \neq \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-s)}x(s)ds$$

Tekemällä tälle molemmin puolin operaatio $(D - \alpha)$ saadaan

$$\begin{aligned} x(t) &\neq (D - \alpha)\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-s)}x(s)ds \\ &= D\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-s)}x(s)ds - \alpha\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-s)}x(s)ds \\ &= e^{\alpha(t-t)}x(t) + \alpha\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-s)}x(s)ds - \alpha\int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-s)}x(s)ds = x(t). \end{aligned}$$

Siis $x(t) \neq x(t)$, mikä ei voi pitää paikkaansa. joten vastaoletus on väärä ja tulos

$$(D - \alpha)^{-1}x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-s)}x(s)ds$$

on oikea. Samalla tavoin myös tulos (13.2) voidaan osoittaa oikeaksi. □

Operaattorille $(D - \alpha)$ saadaan yksikäsitteinen käänteisoperaattori määrittelemällä ratkaisu joko taakse- tai eteenpäinkatsovaksi. Tuloksessa 5 yhtälö (13.1) on taakse- ja yhtälö (13.2) eteenpäinkatsova ratkaisu. Lopuksi todistamme seuraavan aputuloksen:

Tulos 6. *Jos α ja β ovat vakioita sekä x jatkuva muuttuja, niin*

$$(D - \alpha)^{-1}(D - \beta)^{-1}x = \frac{1}{\alpha - \beta}[(D - \alpha)^{-1} - (D - \beta)^{-1}]x.$$

TODISTUS: Tehdään vastaoletus

$$(D-\alpha)^{-1}(D-\beta)^{-1}x \neq \frac{1}{\alpha-\beta}[(D-\alpha)^{-1}-(D-\beta)^{-1}]x.$$

Tehdään tälle molemmin puolin operaatio $(D-\alpha)$:

$$(D-\beta)^{-1}x \neq \frac{1}{\alpha-\beta}[1-(D-\alpha)(D-\beta)^{-1}]x.$$

Määritellään uusi muuttuja $y=(D-\beta)^{-1}x$, jolloin $x=(D-\beta)y$. Sijoittamalla tämä edelliseen epäyhtälöön saadaan

$$\begin{aligned} y &\neq \frac{1}{\alpha-\beta}[1-(D-\alpha)(D-\beta)^{-1}](D-\beta)y \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}[D-\beta-(D-\alpha)]y = \frac{1}{\alpha-\beta}[\alpha-\beta]y = y. \end{aligned}$$

Siis $y \neq y$, joten vastaoletus on väärä ja tulos on oikea. $\square$

13.5 Esimerkkejä

Esim. 1. *Ratkaise* $y_t = a + \lambda y_{t-1}$, *missä* a *on vakio.*

Kirjoitetaan operaattorimuotoon

$$a = y_t - \lambda y_{t-1} = (1-\lambda L)y_t. \tag{13.3}$$

Tästä saadaan erityisratkaisu jakamalla yhtälö molemmin puolin $(1-\lambda L)^{-1}$:llä:

$$\overline{y}_t = (1-\lambda L)^{-1}a \overset{\text{Tulos 3.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i \underbrace{L^i a}_{a} = \sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i a \overset{\text{Tulos 1.}}{=} \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-\lambda}a = \frac{a}{1-\lambda}.$$

Yhtälöä (13.3) vastaava homogeeninen yhtälö on

$$(1-\lambda L)y_t = 0.$$

Sijoitetaan $y_t = k^t$. Tällöin

$$0 = (1-\lambda L)y_t = (1-\lambda L)k^t = k^t - \lambda k^{t-1} = (k-\lambda)k^{t-1} \tag{13.4}$$

eli $k=\lambda$ on karakteristinen juuri. Yleinen ratkaisu on nyt

$$y_t = \overline{y}_t + C\lambda^t = (1-\lambda L)^{-1}a + C\lambda^t = \frac{a}{1-\lambda} + C\lambda^t.$$

Tarkistetaan että ratkaisu on oikea:

$$\begin{aligned} (1-\lambda L)y_t &= (1-\lambda L)[(1-\lambda L)^{-1}a + C\lambda^t] = a + (1-\lambda L)C\lambda^t \\ &= a + C(1-\lambda L)\lambda^t = a + C(\underbrace{\lambda^t - \lambda\lambda^{t-1}}_{=0}) = a. \end{aligned}$$

Esim. 2. *Ratkaise yhtälö 11.1:*

$$y_t = bx_t + \lambda y_{t-1} \quad \textit{(taaksepäinkatsova systeemi)}$$

Kirjoitetaan yhtälö operaattorimuotoon

$$bx_t = y_t - \lambda y_{t-1} = (1 - \lambda L)y_t.$$

Kertomalla yhtälö puolittain $(1 - \lambda L)^{-1}$:llä saadaan erityisratkaisu

$$\begin{aligned} \overline{y}_t &= (1 - \lambda L)^{-1} bx_t = b(1 - \lambda L)^{-1} x_t \\ &\overset{Tulos 3.}{=} b\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i L^i x_t = b\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i}, \end{aligned}$$

eli yhtälö (11.2).

Karakteristinen juuri $k = \lambda$ saadaan samoin kuin esimerkissä 1. Yleinen ratkaisu on siis

$$y_t = \overline{y}_t + C\lambda^t = b(1 - \lambda L)^{-1} x_t + C\lambda^t = b\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_{t-i} + C\lambda^t.$$

Tarkistus:

$$(1 - \lambda L)y_t = (1 - \lambda L)[b(1 - \lambda L)^{-1} x_t + C\lambda^t] = bx_t + C\underbrace{(1 - \lambda L)\lambda^t}_{=0} = bx_t.$$

Esim. 3. *Ratkaise yhtälö 11.4:*

$$y_t = gx_t + \mu y_{t+1} \quad \textit{(eteenpäinkatsova systeemi)}$$

Kirjoitetaan operaattorimuotoon

$$gx_t = y_t - \mu y_{t+1} = (1 - \mu F)y_t.$$

Käänteisoperaatiolla $(1 - \mu F)^{-1}$ saadaan erityisratkaisu

$$\overline{y}_t = (1 - \mu F)^{-1} gx_t = g(1 - \mu F)^{-1} x_t \overset{Tulos 4.}{=} g\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i F^i x_t = g\sum_{i=0}^{\infty} \mu^i x_{t+i}, \tag{13.5}$$

eli yhtälö (11.5).

Karakteristinen juuri saadaan sijoittamalla homogeeniseen yhtälöön

$$(1 - \mu F)y_t = 0$$

termi $y_t = k^t$. Nyt

$$0 = (1 - \mu F)y_t = (1 - \mu F)k^t = k^t - \mu k^{t+1} = (1 - \mu k)k^t.$$

Siispä karakteristinen juuri on $k = \frac{1}{\mu}$. Yleinen ratkaisu saadaan seuraavasti:

$$y_t = \overline{y}_t + C(\frac{1}{\mu})^t = g(1-\mu F)^{-1}x_t + C\mu^{-t} = g\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i x_{t+i} + C\mu^{-t}.$$

Tarkistetaan vielä tulos:

$$\begin{aligned}(1-\mu F)y_t &= (1-\mu F)[g((1-\mu F)^{-1}x_t + c\mu^{-t} =] = gx_t + C(1-\mu F)\mu^{-t} \\ &= gx_t + C[\underbrace{\mu^{-1} - \mu\mu^{-t-1}}_{=0}] = gx_t.\end{aligned}$$

Johtopäätös esimerkeistä 2 ja 3: *Takaisinkatsovan muuttujan kerroin λ on sellaisenaan karakteristinen juuri, mutta eteenpäin katsovan muutujan kerroin μ on käänteisarvona $1/\mu$ karakteristinen juuri.*

Esim 4. *Ratkaise luvun 6 2. kertaluvun taaksepäinkatsova systeemi*

$$y_t = bx_t + \lambda_1 y_{t-1} + \lambda_2 y_{t-2}.$$

Kirjoitetaan operaattorimuotoon

$$bx_t = y_t - \lambda_1 y_{t-1} - \lambda_2 y_{t-2} = (1 - \lambda_1 L - \lambda_2 L^2)y_t.$$

Jotta voisimme soveltaa tulosta 3, hajoitetaan operaattori $(1 - \lambda_1 L - \lambda_2 L^2)$ tekijöiksi

$$1 - \lambda_1 L - \lambda_2 L^2 = (1-\alpha L)(1-\beta L) = \alpha\beta L^2 - (\alpha+\beta)L + 1,$$

missä siis $\lambda_1 = \alpha + \beta$ ja $\lambda_2 = -\alpha\beta$. Täten

$$bx_t = (1 - \lambda_1 L - \lambda_2 L^2)y_t = (1-\alpha L)(1-\beta L)y_t. \tag{13.6}$$

Etsitään nyt yhtälön karakteristiset juuret. Tarkastellaan yhtälöä (13.6) vastaavaa homogeenistä yhtälöä

$$(1-\alpha L)(1-\beta L)y_t = 0$$

Sijoitetaan tähän $y_t = k^t$. Saadaan

$$\begin{aligned}0 &= (1-\alpha L)(1-\beta L)k^t = (1-\alpha L)(k^t - \beta k^{t-1}) = (1-\alpha L)\underbrace{(k-\beta)}_{vakio}k^{t-1} \\ &= (k-\beta)(1-\alpha L)k^{t-1} = (k-\beta)(k^{t-1} - \alpha k^{t-2}) = (k-\beta)(k-\alpha)k^{t-2},\end{aligned}$$

joten karakteristiset juuret ovat $k_1 = \alpha$ ja $k_2 = \beta$. Siispä tässäkin systeemissä L:n kertoimet ovat karakteristiset juuret!

Erityisratkaisut saadaan tekemällä yhtälölle (13.6) molemmin puolin operaatio $(1-\beta L)^{-1}(1-\alpha L)^{-1}$. Koska tuloksen 3 nojalla sekä $(1-\beta L)^{-1}$ että $(1-\alpha L)^{-1}$ ovat L:n polynomeja, on tulo $(1-\beta L)^{-1}(1-\alpha L)^{-1}$ vaihdannainen:

$$(1-\beta L)^{-1}(1-\alpha L)^{-1} = (1-\alpha L)^{-1}(1-\beta L)^{-1}.$$

Nyt erityisrakaisuksi saadaan

$$
\begin{aligned}
\overline{y}_t &= (1-\alpha L)^{-1}(1-\beta L)^{-1}bx_t = b(1-\alpha L)^{-1}(1-\beta L)^{-1}x_t \\
&\overset{Tulos2}{=} b[\frac{\alpha}{\alpha-\beta}(1-\alpha L)^{-1} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}(1-\beta L)^{-1}]x_t \\
&= \frac{\alpha b}{\alpha-\beta}(1-\alpha L)^{-1}x_t - \frac{\beta b}{\alpha-\beta}(1-\beta L)^{-1}x_t \\
&\overset{Tulos3}{=} \frac{\alpha b}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i L^i x_t - \frac{\beta b}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i L^i x_t \\
&= \frac{\alpha b}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i x_{t-i} - \frac{\beta b}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i x_{t-i} \\
&= \frac{k_1 b}{k_1-k_2}\sum_{i=0}^{\infty}{k_1}^i x_{t-i} - \frac{k_2 b}{k_1-k_2}\sum_{i=0}^{\infty}{k_2}^i x_{t-i},
\end{aligned}
$$

missä k_1 ja k_2 ovat systeemin karakteristiset juuret. Systeemin yleinen ratkaisu on

$$y_t = \overline{y}_t + c_1{k_1}^t + c_2{k_2}^t = \overline{y}_t + c_1{k_1}^t + c_2{k_2}^t.$$

Tarkistus:

$$
\begin{aligned}
(1-\alpha L)(1-\beta L)y_t &= (1-k_1L)(1-k_2L)y_t \\
&= (1-k_1L)(1-k_2L)\overline{y}_t + (1-k_1L)(1-k_2L)(c_1{k_1}^t + c_2{k_2}^t) \\
&= bx_t + (1-k_1L)(1-k_2L)(c_1{k_1}^t + c_2{k_2}^t) \\
&= \underbrace{(1-k_1L)(1-k_2L)}_{L\text{:n johdannaisena vaihdannainen}} \cdot c_1{k_1}^t + (1-k_1L)(1-k_2L)c_2{k_2}^t + bx_t \\
&= c_1(1-k_2L)\underbrace{(1-k_1L){k_1}^t}_{=0} + c_2(1-k_1L)\underbrace{(1-k_2L){k_2}^t}_{=0} + bx_t = bx_t.
\end{aligned}
$$

Esim 5. *Ratkaise luvun 6 2. kertaluvun eteenpäinkatsova systeemi*

$$y_t = gx_t + \mu_1 y_{t+1} + \mu_2 y_{t+2}.$$

Kirjoitetaan operaattorimuotoon

$$gx_t = y_t - \mu_1 y_{t+1} - \mu_2 y_{t+2} = (1-\mu_1 F - \mu_2 F^2)y_t.$$

Hajoitetaan operaattori tekijäksi, jotta voidaan käyttää tulosta 4.

$$
\begin{aligned}
1-\mu_1F-\mu_2F^2 &= (1-\gamma F)(1-\delta F) = (1-\delta F)(1-\gamma F) \\
&= \gamma\delta F^2 - (\gamma+\delta)F + 1,
\end{aligned}
$$

missä γ ja δ ovat sellaisia että $\mu_1 = \gamma + \delta$ ja $\mu_2 = \gamma\delta$. Täten

$$gx_t = (1-\mu_1F-\mu_2F^2)y_t = (1-\gamma F)(1-\delta F)y_t \tag{13.7}$$

Karakteristiset juuret saadaan homogeenisestä yhtälöstä sijoittamalla $y_t = k^t$:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\gamma F)(1-\delta F)y_t = (1-\gamma F)(1-\delta F)k^t = (1-\gamma F)(k^t - \delta k^{t+1}) \\ &= (1-\gamma F)\underbrace{(1-\delta k)}_{\text{vakio}}k^t = (1-\gamma k)(1-\gamma F)k^t = (1-\delta k)(1-\gamma k)k^t. \end{aligned}$$

Juuriksi saadaan siis $k_1 = \frac{1}{\gamma}$ ja $k_2 = \frac{1}{\delta}$. Siis F:n kertoimien käänteisarvot ovat jälleen homogeenisen yhtälön karakteristisia juuria.

Erityisratkaisu saadaan tekemällä yhtälölle (13.7) operaatio

$$(1-\gamma F)^{-1}(1-\delta F)^{-1}.$$

Koska tulon molemmat termit $(1-\gamma F)^{-1}$ ja $(1-\delta F)^{-1}$ ovat F:n polynomeja, on tulo vaihdannainen, eli

$$(1-\gamma F)^{-1}(1-\delta F)^{-1} = (1-\delta F)^{-1}(1-\gamma F)^{-1}.$$

Siispä

$$\begin{aligned} y_t &= (1-\gamma F)^{-1}(1-\delta F)^{-1}gx_t \\ &= g(1-\gamma F)^{-1}(1-\delta F)^{-1}x_t \\ &\overset{\text{Tulos 2}}{=} g[\frac{\gamma}{\gamma-\delta}(1-\gamma F)^{-1} - \frac{\delta}{\gamma-\delta}(1-\delta F)^{-1}]x_t \\ &= \frac{\gamma g}{\gamma-\delta}(1-\gamma F)^{-1}x_t - \frac{\delta g}{\gamma-\delta}(1-\delta F)^{-1}x_t \\ &\overset{\text{Tulos 4}}{=} \frac{\gamma g}{\gamma-\delta}\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i x_{t+i} - \frac{\delta g}{\gamma-\delta}\sum_{i=0}^{\infty}\delta^i x_{t+i} \\ &= \frac{gk_2}{k_2-k_1}\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{k_1})^i x_{t+1} - \frac{gk_1}{k_2-k_1}\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{k_2})^i x_{t+1}, \end{aligned}$$

missä k_1 ja k_2 ovat systeemin karakteristiset juuret. Yleinen ratkaisu on siis

$$y_t = \overline{y}_t + c_1{k_1}^t + c_2{k_2}^t.$$

Tarkistetaan vielä:

$$\begin{aligned} &(1-k_1F)(1-k_2F)y_t \\ &\quad = (1-k_1F)(1-k_2F)\overline{y}_t + (1-k_1F)(1-k_2F)(c_1{k_1}^t + c_2{k_2}^t) \\ &\quad = gx_t + c_1(1-k_2F)\underbrace{(1-k_1F){k_1}^t}_{=0} + c_2(1-k_1F)\underbrace{(1-k_2F){k_2}^t}_{=0} = gx_t \end{aligned}$$

Esim 6. *Ratkaise yhtälö (11.16):*

$$y_t = ax_t + \lambda y_{t-1} + \mu y_{t+1} \quad \textit{(eteen- ja taaksepäinkatsova systeemi.)}$$

Kirjoitetaan operaattorimuotoon:

$$\begin{aligned}
y_t &= ax_t + \lambda y_{t-1} + \mu y_{t+1} = ax_t + \lambda L y_t + \mu F y_t \quad \Leftrightarrow \\
x_t &= (1 - \lambda L - \mu F) y_t = \mu\Big(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} L - F\Big) y_t \\
&= \mu\Big(\frac{1}{\mu} F^{-1} - \frac{\lambda}{\mu} L F^{-1} - 1\Big) F y_t \overset{F^{-1}=L}{=} \mu\Big(\frac{1}{\mu} L - \frac{\lambda}{\mu} L^2 - 1\Big) F y_t \\
&= -\mu\Big(\frac{\lambda}{\mu} L^2 - \frac{1}{\mu} L + 1\Big) F y_t
\end{aligned}$$

Hajoitetaan operaattori tekijöiksi:

$$\frac{\lambda}{\mu} L^2 - \frac{1}{\mu} L + 1 = (1 - \alpha L)(1 - \beta L) = \alpha\beta L^2 - (\alpha + \beta) L + 1$$

mistä saadaan $\alpha + \beta = \frac{1}{\mu}$ and $\alpha\beta = \frac{1}{\mu}$. Siispä karakteristiset juuret ovat $k_1 = \alpha$ ja $k_2 = \beta$. Tällöin

$$ax_t = -\mu(1 - \alpha L)(1 - \beta L) F y_t.$$

Tehdään nyt molemmin puolin operaatio

$$-\frac{1}{\mu}(1 - \alpha L)^{-1}(1 - \beta L)^{-1} \underbrace{F^{-1}}_{=L},$$

jolloin saadaan erityisratkaisu

$$\begin{aligned}
\overline{y}_t &= -\frac{1}{\mu}(1 - \alpha L)^{-1}(1 - \beta L)^{-1} L a x_t \\
&= -\frac{a}{\mu}(1 - \alpha L)^{-1}(1 - \beta L)^{-1} L x_t \\
&\overset{\text{Tulos 2}}{=} -\frac{a}{\mu}\frac{\alpha}{\alpha - \beta}(1 - \alpha L)^{-1} L x_t + \frac{a}{\mu}\frac{\beta}{\alpha - \beta}(1 - \beta L)^{-1} L x_t \\
&\overset{\text{Tulos 5}}{=} -\frac{a}{\mu}\frac{1}{\alpha - \beta}(1 - \frac{1}{\alpha} F)^{-1} F L x_t + \frac{a}{\mu}\frac{\beta}{\alpha - \beta}(1 - \beta L)^{-1} L x_t \\
&= \frac{a}{\mu}\frac{1}{\alpha - \beta}\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{\alpha})^i x_{t+i} + \frac{a}{\mu}\frac{\beta}{\alpha - \beta}\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i x_{t-i-1} \\
&= \frac{a}{\mu}\frac{1}{k_1 - k_2}\sum_{i=0}^{\infty} k_1^{-i} x_{t+i} + \frac{a}{\mu}\frac{k_2}{k_1 - k_2}\sum_{i=0}^{\infty} k_2^i x_{t-i-1},
\end{aligned}$$

eli yhtälö (11.17) on täsmällisesti ottaen tämä yhtälö.

Yleinen ratkaisu on nyt:

$$y_t = \overline{y}_t + c_1 k_1^t + c_2 k_2^t.$$

Tarkistus:

$$\begin{aligned}
(1 - \lambda L - \mu F) y_t &= -\mu(\frac{1}{\mu} L^2 - \frac{1}{\mu} L + 1) F y_t \\
&= -\mu(\frac{1}{\mu} L^2 - \frac{1}{\mu} L + 1) y_t - \mu(\frac{1}{\mu} L^2 - \frac{1}{\mu} L + 1)(c_1 k_1^t + c_2 k_2^t) \\
&= -\mu(\frac{1}{\mu} L^2 - \frac{1}{\mu} L + 1)\overline{y}_t = ax_t.
\end{aligned}$$

Esim 7. *Ratkaise ajan t suhteen jatkuva yhtälö*

$$\frac{dy(t)}{dt} = a + \lambda y(t).$$

Kirjoitetaan operaattorimuotoon:

$$a = \frac{dy}{dt} - \lambda y = (D - \lambda)y.$$

Erityisratkaisuksi saadaan

$$\overline{y} = (D - \lambda)^{-1} a.$$

Jos $\lambda < 0$, niin systeemi on taaksepäin katsova ja erityisratkaisu täsmentyy muotoon

$$\overline{y} = \int_{-\infty}^{t} (e^{\lambda(t-s)} a) ds = a \int_{-\infty}^{t} (e^{\lambda(t-s)}) ds = -\frac{a}{\lambda} \Big/_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} = -\frac{a}{\lambda}.$$

Jos $\lambda > 0$, niin systeemi on eteenpäinkatsova ja erityisratkaisu täsmentyy muotoon

$$\overline{y} = -\int_{t}^{\infty} (e^{\lambda(t-s)} a) ds = -a \int_{t}^{\infty} (e^{\lambda(t-s)}) ds = -\frac{a}{\lambda} \Big/_{t}^{\infty} e^{\lambda(t-s)} = -\frac{a}{\lambda}.$$

Siis erityisratkaisu on aina $\overline{y} = -\frac{a}{\lambda}$. Yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$y = \overline{y} + ce^{\lambda t} = -\frac{a}{\lambda} + ce^{\lambda t}.$$

Esim 8. *Ratkaise yhtälö*

$$\frac{dy(t)}{dt} = bx(t) + \lambda y(t),$$

missä x on eksogeeninen muuttuja.

Kirjoitetaan operaattorimuotoon

$$bx = \frac{dy}{dt} - \lambda y = (D - \lambda)y.$$

Erityisratkaisuksi saadaan

$$\overline{y} = (D - \lambda)^{-1} bx = b(D - \lambda)^{-1} x.$$

Jos systeemi on taaksepäinkatsova, ratkaisu täsmentyy muotoon

$$\overline{y} = b \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda(t-s)} x(s) ds,$$

mikäli $e^{\lambda(t-s)}x(s)$ suppenee.

Jos systeemi on puolestaan eteenpäinkatsova, ratkaisu täsmentyy muotoon

$$\overline{y} = -b \int_t^{\infty} e^{\lambda(t-s)}x(s)ds,$$

mikäli $e^{\lambda(t-s)}x(s)$ suppenee.

Yleinen ratkaisu on nyt

$$y = \overline{y} + ce^{\lambda t}.$$

Esim 9. *Ratkaise yhtälö*

$$\frac{d^2y(t)}{dt} + \varpi\frac{dy(t)}{dt} + \nu y(t) = bx(t),$$

missä x on eksogeeninen muuttuja.

Kirjoitetaan yhtälö operaattorimuotoon

$$bx(t) = (D^2 + \varpi D + \nu)y. \tag{13.8}$$

Hajoitetaan operaattori tekijöiksi

$$bx(t) = (D - \alpha)(D - \beta)y,$$

missä

$$D^2 + \varpi D + \nu = D^2 + (a + \beta)D + \alpha\beta,$$

eli $\varpi = -\alpha - \beta$ ja $\nu = \alpha\beta$.

Yhtälön (13.8) karakteristiset juuret saadaan muokkaamalla vastaavaa homogeenistä yhtälöä

$$\begin{aligned} 0 &= (D-\alpha)(D-\beta)y = (D-\alpha)(D-\beta)e^{\lambda t} = (D-\alpha)(\lambda e^{\lambda t} - \beta e^{\lambda t}) \\ &= (D-\alpha)\underbrace{(\lambda-\beta)}_{=\text{vakio}}e^{\lambda t} = (\lambda-\beta)(D-\alpha)e^{\lambda t} = (\lambda-\beta)(\lambda-\alpha)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Karakteristiset juuret ovat siis $\lambda_1 = \alpha$ ja $\lambda_2 = \beta$.

Tekemällä yhtälölle (13.8) operaatio $(D-\alpha)^{-1}(D-\beta)^{-1}$, saadaan erityisratkaisuksi

$$\begin{aligned} \overline{y} &= (D-\alpha)^{-1}(D-\beta)^{-1}bx(t) = b(D-\alpha)^{-1}(D-\beta)^{-1}xD \\ &\overset{\text{Tulos 7.}}{=} \frac{b}{\alpha-\beta}[(D-\alpha)^{-1} - (D-\beta)^{-1}]x(s) \\ &= \frac{b}{\lambda_1-\lambda_2}[(D-\alpha)^{-1} - (D-\beta)^{-1}]x(s), \end{aligned}$$

missä λ_1 ja λ_2 ovat karakteristiset juuret.

Nyt on olemassa kolme erilaista mahdollista systeemiä:

i) pelkästään taaksepäinkatsova systeemi, jolloin erityisratkaisu täsmentyy muotoon

$$\overline{y}(t) = \frac{b}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_1(t-s)}x(s)ds - \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_2(t-s)}x(s)ds\right].$$

ii) pelkästään eteenpäinkatsova systeemi, jolloin erityisratkaisuksi saadaan

$$\overline{y}(t) = -\frac{b}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\int_{t}^{\infty} e^{\lambda_1(t-s)}x(s)ds - \int_{t}^{\infty} e^{\lambda_2(t-s)}x(s)ds\right].$$

iii) sekä taaksepäin- että eteenpäinkatsova systeemi, jolloin erityisratkaisu on muotoa

$$\overline{y}(t) = -\frac{b}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\int_{t}^{\infty} e^{\lambda_1(t-s)}x(s)ds + \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_2(t-s)}x(s)ds\right],$$

missä λ_1 on nyt epästabiili juuri.

Yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$y(t) = \overline{y}(t) + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Tarkistetaan vielä ratkaisu.

$$\begin{aligned}(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y(t) &= (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\overline{y}(t) + \\ &\quad (D-\lambda_1)(D-\lambda_2)(c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}) \\ &= bx(t).\end{aligned}$$